

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЁТ
ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ**

ТООМАС ЛЕПИКУЛТ

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЁТ
ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ**

ТООМАС ЛЕПИКУЛТ

Факультет математики Тартуского Университета, Эстония

Диссертация допущено на соискание учёной степени доктора математических наук 27 января 1995 докторским комитетом математического факультета Тартуского Университета.

Оппоненты:

Др. физ.-мат. наук, проф.

Яан Леллеп

Тартуский Университет

Кнд. физ.-мат. наук, доц.

Юри Кирс

Таллинский Технический

Университет

Защита состоится 21 апреля 1995.

Издание диссертации поддержана Эстонской Научной Фондой.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК	12
1.1. Постановка задачи	12
1.2. Основные уравнения	14
1.3. Интегрирование уравнений движения	15
1.4. Структура системы уравнений	19
1.5. Общая схема решения задачи	25
1.6. Примеры	26
2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК	31
2.1. Постановка задачи	31
2.2. Описание хода решения задачи	31
2.3. Пример	34
3. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК С ФИКСИРОВАННЫМИ КОНЦАМИ	39
3.1. Постановка задачи	39
3.2. Основные уравнения	39
3.3. Интегрирование уравнений движения	41
3.4. Система уравнений для определения ускорений	44
3.5. Определение продольной силы	45
3.6. Ход решения задачи	47
3.7. Примеры	49
4. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК	54
4.1. Постановка задачи	54
4.2. Основные соотношения	54
4.3. Система определяющих уравнений и метод решения при условии текучести Треска	59
4.4. Система определяющих уравнений и метод решения при условии текучести Мизеса	65
4.5. Общая схема решения задачи	69
4.6. Примеры	72

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	78
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	80
KOKKUVÕTE	85
CURRICULUM VITAE (в русском языке)	86
CURRICULUM VITAE (в эстонском языке)	87

ВВЕДЕНИЕ

Современные конструкции часто подвергаются высоким динамическим нагрузкам, при которых возникают пластические деформации. Проблема определения остаточных деформаций в конструкциях, изготовленных из пластических металлов и подвергнутых динамическим нагрузкам высокой интенсивности, является очень трудной. Усложняющими обстоятельствами служат диссипация энергии, переходящей в пластическую работу, упругая разгрузка из пластических состояний, упрочнение, зависимость предела текучести от скорости деформации, влияние геометрических изменений и различные иные нелинейные эффекты. Имеется лишь незначительное число решений задач о динамическом нагружении, учитывающих все названные факторы. В большинстве случаев один или более из этих факторов считаются определяющими поведение конструкции, а влиянием остальных либо пренебрегают, либо их учитывают приближенно.

Одной из наиболее распространённых идеализаций является модель идеально жёсткопластического тела, т.е. тела, которое остаётся совершенно недеформируемым, пока напряжение в каком-нибудь из его элементов не станет равным предельной величине и не возникнет возможность пластического течения.

В применении к расчёту конструкций, подвергнутых кратковременной нагрузке высокой интенсивности, простая жёсткопластическая теория имеет некоторую область применимости. Эта область ограничена, с одной стороны, требованием: деформации не должны быть столь велики, чтобы геометрические изменения были значительны, а с другой стороны, требованием: энергия возмущения должна быть велика по сравнению с упругой энергией, которую может накопить конструкция (для оправдания пренебрежения упругими эффектами). Эти требования в какой-то мере противоречивы, так как при больших возмущениях удовлетворение энергетического требования приводит к большим деформациям. Таким образом, размеры возможной области применимости простой жёсткопластической теории должны зависеть от конфигурации и гибкости конструкции, и в некоторых случаях она может не существовать вообще.

Исследование динамически нагруженных балок началось 50-х годах (Conroy, 1952; Symonds, 1953; Parkes, 1955; Symonds, Leth, 1954; Lée, Symonds, 1952; Symonds, 1954). П. Саймондс (1956) на

упругопластической модели с одной степенью свободы установил вполне удовлетворительную приемлемость жёсткопластической теории при динамическом нагружении.

Почти одновременно делаются попытки исследования динамического изгиба балок, изготовленных из жёсткопластического материала, обладающего упрочнением (Conroy, 1955).

В 1966. г. Дж. Мартин и П. Саймондс опубликовали работу (Martin, Symonds, 1966), в которой излагается метод модальных движений для решения задач динамики жёсткопластического тела. Метод нашёл широкое применение не только при решении задач балок и стержней, но и в случае более сложных объектов, таких как пластины и осесимметричные оболочки.

Согласно названному методу поле скоростей задаётся в форме

$$\dot{u}_i(x, t) = \Phi(t) v_i^*(x),$$

где $\Phi(t)$ — амплитудная функция, $v_i^*(x)$ — пространственная мода. Применение этого метода к задачам динамики ступенчатых балок можно найти в (Лепик, 1982; Lepik, Just, 1983). В последней работе впервые сделана попытка алгоритмизировать решение задач динамики жёсткопластических балок. В отличие от предыдущих работ в названной работе выбор пластических режимов, реализующихся в процессе движения, осуществляется автоматизированно при помощи компьютера. Аналогичная цель, учитывающая также движение пластических шарниров, поставлена и в настоящей диссертации. Метод решения, учитывающий движение шарниров, описана в работах Ю. Лепика (1979, 1980).

Влияние мембранных эффектов, возникающих при фиксировании концов балки, исследовано в работах П. Саймондса и Т. Ментела (1958) и Ю. Лепика (1985).

С целью проверки теоретических результатов по балкам была выполнена серия экспериментов. Первым из них следует считать эксперимент П. Дюве, Д. Кларка и М. Боненблуста (1950). Несколько позднее динамические испытания балок были проведены Е. Парксом (1955, 1956) и Т. Ментелом (1958). Экспериментальные величины прогибов и углов поворота получались ниже теоретических, составляя от них примерно 30–80%

Задача оптимального проектирования жёсткопластических трёх-ступенчатых балок в случае импульсного нагружения была решена Ю. Лепиком и З. Мрузом (1977, 1978). Авторы применили метод модальных форм движения. Точное решение опубликовано Ю. Лепиком в (Lepik, 1981). Жёсткопластическая балка,

нагруженная одномерным давлением в коротком промежутке времени $0 \leq t \leq t_1$ была оптимизирована в работах (Lepik, Mróz, 1977; Лепик, 1979; Lepik, 1982). Аналогичная задача в случае упругой балки решена Ю. Лепиком в (Lepik, 1985).

Наиболее ценные первоначальные результаты по цилиндрическим оболочкам принадлежат П. Ходжу (1955a, 1955b, 1956, 1959). Предложенная им аппроксимация точной предельной кривой для цилиндрической оболочки оказалась в дальнейшем весьма плодотворной. Вслед за П. Ходжем её используют Г. Исон и Р. Шилд (1956). Некоторые обоснования указанной аппроксимации приводились позднее в работе П. Ходжа и Б. Пола (1957). К тому же периоду времени относится исследование П. Оуэнса и П. Саймондса (1955) о пластической деформации свободного кольца под действием сосредоточенной динамической нагрузки. Родственные задачи исследовались Е. Х. Агабабяном в (Агабабян, 1955) и М. А. Задояном в (Задоян, 1960). В работах П. А. Кузина и Г. С. Шапиро (Кузин, 1962; Кузин, 1964; Kuzin, Shapiro, 1966) исследовано динамическое изгибание цилиндрических оболочек под действием внутреннего кольцевого давления как при защемленном (Кузин, 1962), так и при шарнирно опёртом крае (Кузин, 1964). Изучены различные случаи поведения оболочки в зависимости от её длины, величины и координаты приложения нагрузки прямоугольного типа. Изучены также случаи движения, когда некоторому сечению оболочки на некотором начальном отрезке времени сообщается постоянная скорость v_0 . В аналогичной постановке в работе (Kuzin, Shapiro, 1966) исследуется влияние свободного края на механизм движения и остаточные прогибы полубесконечной цилиндрической оболочки. Предельная кривая в виде шестиугольника используется в работе (Sankaranarayanan, 1962) при отыскании остаточного прогиба круговой цилиндрической оболочки, защемленной на одном конце и свободной на другом. А. Н. Спорыхин и Н. Д. Хомяков (1971) обобщили решение П. Ходжа (1955a) на случай динамического давления, равномерно распределённого на некотором участке длины, расположенном симметрично относительно середины оболочки.

Метод модальных движений при решении задач динамики оболочек со стенкой кусочно-постоянной толщины использовал Ю. Лепик в монографии (Лепик, 1982). Аспекты импульсно нагружённых цилиндрических оболочек проанализированы Г. М. Оленевым в (Оленев, 1982; Оленев, 1989).

Более обширный обзор по исследованиям динамики жёстко-

пластических цилиндрических оболочек можно найти в (Мазалов, Немировский, 1975).

Цель диссертации состоит в построении алгоритмов автоматизированного решения задач динамики жёсткопластических ступенчатых балок и цилиндрических оболочек.

Научная новизна работы. Выработана методика автоматизации решения задач динамики ступенчатых балок как с нефиксированными так и с фиксированными опорами. Для решения задач динамики трёхслойных цилиндрических оболочек составлены алгоритмы в случаях условий текучести Треска и Мизеса. Выработана методика решения оптимизационной задачи динамики жёсткопластических ступенчатых балок, когда при фиксированном объёме, краевых условиях и нагрузке минимизируется максимальный остаточный прогиб.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения.

Во введении дан краткий обзор исследований по динамике и оптимальному проектированию жёсткопластических ступенчатых балок и цилиндрических оболочек, определена цель работы.

В первой главе составлен алгоритм для решения задач динамики ступенчатых жёсткопластических балок, концы которых могут перемещаться в направлении оси балки. Нагрузка предполагается в виде $P(x, t) = P_1(x) \cdot P_2(t)$. В качестве численных примеров приведены решения трёх конкретных задач.

Вторая глава посвящена оптимальному проектированию жёсткопластических ступенчатых балок. Дается методика определения оптимальных параметров конфигурации балки. Приведены результаты оптимизации трёхступенчатой балки.

В третьей главе решается задача динамического изгиба жёсткопластических ступенчатых балок, концы которых не могут перемещаться в направлении оси балки. При этом учитываются мембранные эффекты. Приведены численные примеры.

В четвёртой главе вырабатывается методика решения задач динамики жёсткопластических трёхслойных цилиндрических оболочек. В качестве условий текучести применяется эллипс Мизеса и шестиугольник Треска.

Аппробация. По результатам работы были сделаны доклады на следующих конференциях:

- 1) Всесоюзная конференция "Проблемы снижения материалоемкости силовых конструкций" Горький, 23–25 окт. 1984.

- 2) X семинар "Актуальные проблемы прочности" Тарту, 23–26 апр. 1985.
- 3) Школа молодых учёных "Численные методы механики сплошной среды" Шушенское, 28 мая – 3 июня 1987
- 4) Eesti VIII Mehaanikapäevad. Andineeme, 1.–3. juuni 1988.
- 5) Всесоюзное совещание-семинар молодых учёных "Актуальные проблемы механики оболочек" Казань 23–29 июня 1988.
- 6) Конференция "Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций" Тарту, 23–25 мая 1989.
- 7) Математическое моделирование технологических процессов обработки материалов давлением. Пермь, 19–21 июня 1990.
- 8) 14th IFIP Conference on "System Modelling and Optimization" Leipzig, July 3–7, 1989.
- 9) XII. Internationaler Kongreß über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften. Weimar, vom 24. bis 29. Juni 1990.
- 10) Проблемы теоретической и прикладной математики. Тарту, 21–22 сент. 1990.
- 11) International Conference on Applied and Industrial Mathematics. Linköping, June 6–10, 1994.
- 12) Eesti IX Mehaanikapäevad. Tallinn, 22. – 23. sept. 1994.

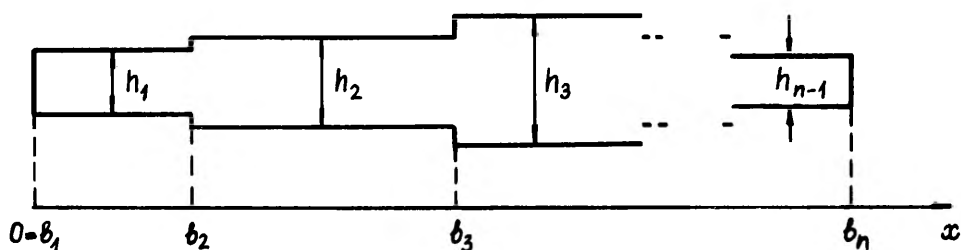
Основные результаты опубликованы в 11 работах (Лепикулт, 1983–1990; Lepik, Lepikult 1987; Lepikult, 1992).

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ю. Лепику за идею задачи и полезные обсуждения.

1. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения. Материал балки — жёсткопластический, высота — кусочно-постоянная, ширина — постоянная. Размеры балки указаны на фиг. 1.



Фиг. 1

Концы балки могут быть свободно опёртыми, жёстко зашечленными или совсем свободными. Балка нагружена поперечным давлением $P = P(x, t)$ и сосредоточенными нагрузками $P^i = P^i(x, t)$, где x — координата вдоль оси балки, t — время. Сосредоточенные силы приложены в сечениях $x = x_i$, $i = 1, \dots, k$, (фиг. 2).

Пусть интенсивность нагрузок изменяется по закону

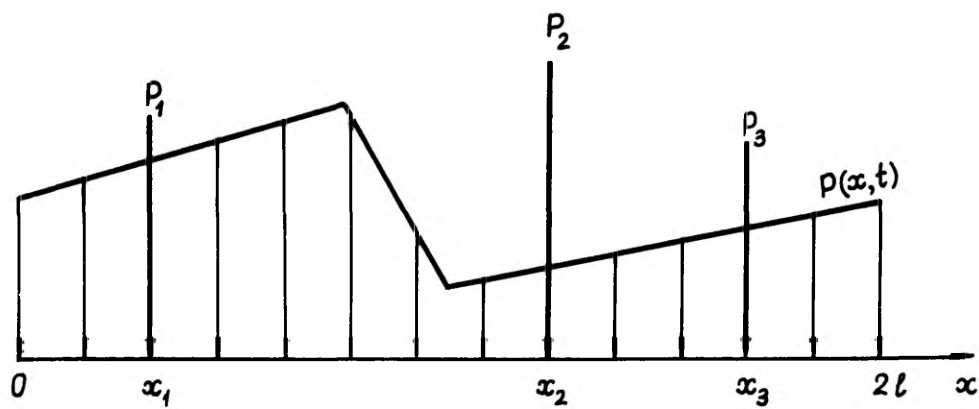
$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_1(x) P_2(t), \\ P^i(x, t) &= P_1^i(x) P_2(t), \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (1.1)$$

В качестве функции $P_2(t)$ в данной диссертации используется функция следующего вида:

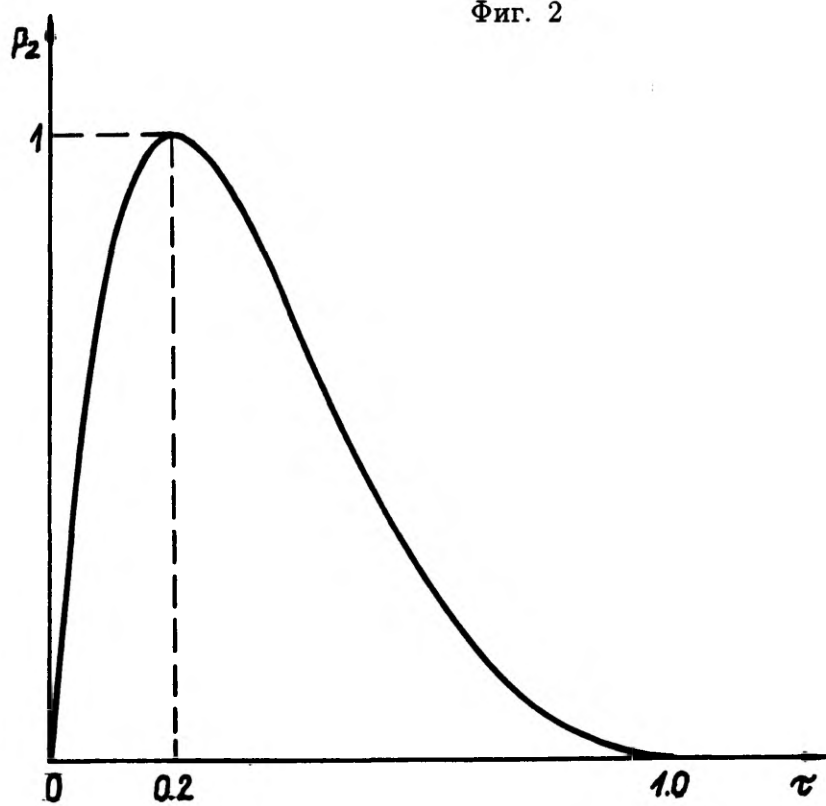
$$P_2(t) = \exp(-\alpha^* t) \sin(\omega^* t), \quad (1.2)$$

где α^* и ω^* — заданные числа (такая зависимость хорошо характеризует взрывообразную нагрузку). Формула (1.2) имеет место до момента $T = \pi/\omega^*$, в дальнейшем примем

$$P(x, t) = P^i(x, t) \equiv 0 \quad (\text{фиг. 3}).$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Функции $P_1(x)$ и $P_1^i(x)$ характеризуют интенсивности нагрузок в момент максимальной нагрузки. Поставим задачу: найти остаточные прогибы оси балки и время деформации при заданных нагрузках, граничных условиях и конфигурации балки.

1.2. Основные уравнения

Представим уравнения движения балки в виде

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = \rho B h(x) \frac{\partial W(x, t)}{\partial t^2} - P(x, t), \quad (1.3)$$

где ρ — плотность, W — прогиб, t — время, P — давление, x — координата вдоль оси балки, M — изгибающий момент, Q — перерезывающая сила, B , h — ширина и высота балки.

В сечениях $x = x_i$, $i = 1, \dots, k$, где приложены сосредоточенные силы, должны быть выполнены требования

$$Q(x_{i+}, t) - Q(x_{i-}, t) = -P^i(x, t) \quad (1.4)$$

Переходим к следующим безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \quad \alpha_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \gamma(\xi) = \frac{h(\xi l)}{h_*}, \quad \tau_* = \frac{t_m}{T}, \\ m(\xi, \tau) &= \frac{4M(\xi l, T\tau)}{\sigma_0 B h_*^2}, \quad q(\xi, \tau) = \frac{4lQ(\xi l, T\tau)}{\sigma_0 B h_*^2}, \\ p(\xi, \tau) &= \frac{4lP_1(\xi l)}{\sigma_0 B h_*^2} p_2(\tau), \quad p^i(\xi, \tau) = \frac{4lP^i(\xi l, T\tau)}{\sigma_0 B h_*^2} p_2(\tau), \\ w(\xi, \tau) &= \frac{2\rho l^2 W(\xi l, T\tau)}{3\sigma_0 h_* T^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где σ_0 — предел текучести, t_m — момент максимальной нагрузки и

$$p_2(\tau) = \exp\left(\frac{\pi(\tau_* - \tau)}{\tan(\pi\tau_*)}\right) \frac{\sin(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau_*)}$$

Символ h_* обозначает среднюю высоту балки и вычисляется по формуле

$$h_* = \frac{V}{2Bl} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) представляются теперь в форме

$$m'(\xi, \tau) = q(\xi, \tau), \quad q'(\xi, \tau) = 6\gamma(\xi)\ddot{w}(\xi, \tau) - p(\xi, \tau), \quad (1.7)$$

$$q(\xi_i+, \tau) - q(\xi_i-, \tau) = -p^i(\xi, \tau) \quad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем точками обозначены производные по безразмерному времени τ , а штрихами — по ξ .

Так как материал балки жёсткопластический, то в тех сечениях, где изгибающий момент равен его предельному значению, возникают пластические шарниры, а участок балки между шарнирами остаётся жёстким. Шарниры могут двигаться вдоль оси балки.

1.3. Интегрирование уравнений движения

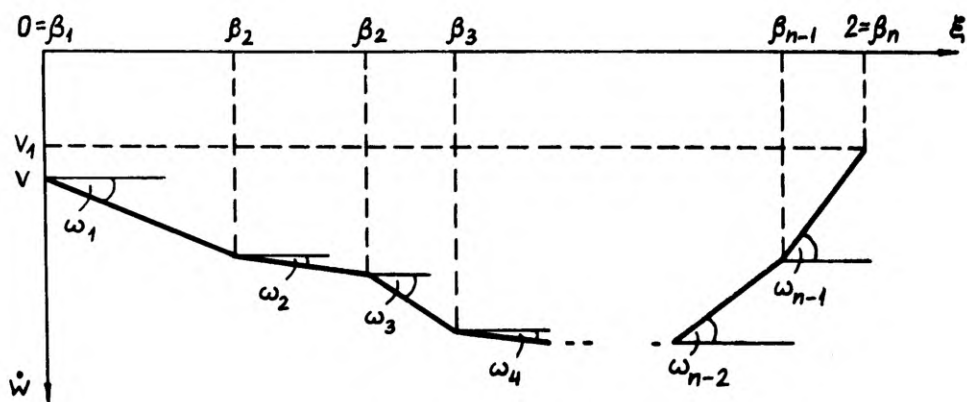
Для решения задачи следует интегрировать систему (1.7)–(1.8) с момента $\tau = 0$ до $\tau = \tau_f$, когда движение кончится при заданных нагрузках и граничных условиях. С этой целью образуем вектор $\vec{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_1 = 0$, $\beta_n = 2$ и компоненты β_i , $i = 2, \dots, n-1$ обозначают

- 1) координаты пластических шарниров;
- 2) сечения, где приложены сосредоточенные силы;
- 3) сечения, где изменяется высота балки.

Размерность вектора \vec{B} меняется в ходе решения задачи. Предположим ещё, что компоненты вектора \vec{B} упорядочены.

Введём ещё следующие безразмерные величины: v_0, v_1, s_0, s_1 — скорости и ускорения концов балки; $\omega_i, \dot{\omega}_i$ — угловая скорость и угловое ускорение звена балки на участке $\xi \in [\beta_i, \beta_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ (фиг. 4), γ_i — высота балки на участке $\xi \in [\beta_i, \beta_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. Скорость \dot{w} в точке $\xi \in [\beta_k, \beta_{k+1}]$ определяется по формуле

$$\dot{w}(\xi, \tau) = v + \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i(\beta_{i+1} - \beta_i) + \omega_k(\xi - \beta_k). \quad (1.9)$$



Фиг. 4

Отсюда следует что

$$v_1 = v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (\beta_{i+1} - \beta_i) \quad (1.10)$$

Продифференцируем формулы (1.9)–(1.10) по времени, учитывая, что шарниры могут двигаться вдоль оси балки (на опорах шарниры можем считать стационарными). Получим

$$\begin{aligned} \ddot{w}(\xi, \tau) = & s + \sum_{i=1}^{k-1} \dot{\omega}_i (\beta_{i+1} - \beta_i) + \dot{\omega}_k (\xi - \beta_k) + \\ & + \sum_{i=2}^k \dot{\beta}_i (\omega_{i-1} - \omega_i), \quad \xi \in [\beta_k, \beta_{k+1}], \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$s_1 = s_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \dot{\omega}_i (\beta_{i+1} - \beta_i) + \sum_{i=2}^{n-1} \dot{\beta}_i (\omega_{i-1} - \omega_i). \quad (1.12)$$

Обозначим символами $q_+(\xi, \tau)$ и $m_+(\xi, \tau)$ ту часть величин $q(\xi, \tau)$ и $m(\xi, \tau)$, которая не зависит от давления $p(\xi, \tau)$. Тогда на основании формул (1.7)–(1.8) и (1.11) имеем для отрезка $\xi \in [\beta_k, \beta_{k+1}]$, что

$$\begin{aligned} q_+(\xi, \tau) = & q_+(\beta_k, \tau) + 6\gamma_k \left(s_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \dot{\omega}_i (\beta_{i+1} - \beta_i) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^k \dot{\beta}_i (\omega_{i-1} - \omega_i) \right) (\xi - \beta_k) + \end{aligned}$$

$$+ 3\gamma_k \dot{\omega}_k (\xi - \beta_k)^2 - p^j(\beta_k, \tau) , \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} m_+(\xi, \tau) &= m_+(\beta_k, \tau) + (q_+(\beta_k, \tau) - p^j(\beta_k, \tau)) (\xi - \beta_k) + \\ &+ 3\gamma_k \left(s_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \dot{\omega}_i (\beta_{i+1} - \beta_i) + \sum_{i=2}^k \dot{\beta}_i (\omega_{i-1} - \omega_i) \right) (\xi - \beta_k)^2 + \\ &+ \gamma_k \dot{\omega}_k (\xi - \beta_k)^3 \end{aligned}$$

Для каждого момента времени функции $q_+(\xi, \tau)$ и $m_+(\xi, \tau)$ можно вычислить рекуррентно для всего отрезка $[\beta_1, \beta_n]$. Расчёт начинается со значений $q_+(\beta_1, \tau) = q_0(\tau)$ и $m_+(\xi, \tau) = m_0(\tau)$, где символами $q_0(\tau)$ и $m_0(\tau)$ обозначены значения перерезывающей силы и изгибающего момента на левом конце балки. Обозначая ещё

$$\pi_1(\xi, \tau) = \int_0^\xi p(\xi, \tau) d\xi , \quad \pi_2(\xi, \tau) = \int_0^\xi \pi_1(\xi, \tau) d\xi , \quad (1.14)$$

получим для определения функций $q(\xi, \tau)$ и $m(\xi, \tau)$ формулы

$$\begin{aligned} q(\xi, \tau) &= q_+(\xi, \tau) - \pi_1(\xi, \tau) , \\ m(\xi, \tau) &= m_+(\xi, \tau) - \pi_2(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Проанализируем теперь граничные условия. Если левый конец балки свободно опёрт, получим 2 уравнения

$$m_0(\tau) = 0 , \quad s_0 = 0 \quad (1.16)$$

Если левый конец балки совсем свободный, получим

$$m_0(\tau) = 0 , \quad q_0(\tau) = 0. \quad (1.17)$$

Если левый конец балки жёстко заделан, надо рассмотреть два подварианта. Если при $\xi = 0$ возникает шарнир, то

$$m_0(\tau) = -\tilde{m}_s , \quad s_0 = 0 , \quad (1.18)$$

где $\tilde{m}_s = \gamma^2(0)$ обозначает предельный изгибающий момент балки при $\xi = 0$. Если же в сечении $\xi = 0$ шарнира не будет, получим равенства

$$\dot{\omega}_1 = 0 , \quad s_0 = 0 \quad (1.19)$$

Аналогичные пары уравнений получим и на правом конце балки. Таким образом, из граничных условий получаем всегда 4 уравнения.

Допустим теперь, что в момент τ во внутренних точках балки имеется n_1 шарниров, причём n_2 из них подвижные. Таким образом, в каждый момент τ имеем неизвестные $v_0, v_1, \omega_1, \dots, \omega_{n_1+1}, \beta_1, \beta_{n_2}, q_0, m_0$. Вообще неизвестных $n_1 + n_2 + 5$.

Составим теперь систему уравнений для определения неизвестных.

В шарнирах должны быть выполнены условия

$$m(\beta_k, \tau) = \tilde{m}_k, \quad (1.20)$$

где

$$\tilde{m}_k = \pm (\inf(\gamma_{k-1}, \gamma_k))^2, \quad k = 1, \dots, n_1 \quad (1.21)$$

Подвижный шарнир может существовать только там, где функция $m(\xi, \tau)$ достигает экстремума по ξ , т.е.

$$m'(\beta_k, \tau) = q(\beta_k, \tau) = 0, \quad k = 1, \dots, n_2 \quad (1.22)$$

Вообще имеем 4 уравнения из граничных условий, 1 уравнение (1.12), n_1 уравнений из условий (1.20) и n_2 уравнений из условий (1.22). Таким образом, число уравнений $n_1 + n_2 + 5$, что совпадает с числом неизвестных. Описываемая система уравнений является квазилинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C(\tau, \vec{y}) \dot{\vec{y}} = \vec{F}(\tau, \vec{y}), \quad (1.23)$$

где \vec{y} и $\dot{\vec{y}}$ обозначают вектора неизвестных и его производной по времени, $C(\tau, \vec{y})$ — матрица системы и $\vec{F}(\tau, \vec{y})$ — вектор свободных членов.

Если к моменту τ нагрузка будет выше статической предельной нагрузки и существует $\xi \in [0, 2]$, так что $\dot{w}(\xi, \tau) \neq 0$, то эта система является однозначно разрешимой. Но если к моменту τ нагрузка ниже статически предельной, система разрешается однозначно только при статически определённых задачах. Статически неопределёнными являются задачи, при которых

- 1) балка в одном конце свободно оперта, а в другом — жёстко заделана ;

2) балка в обоих концах жёстко заделана.

В случае статически неопределённых задач вычислим предельную нагрузку, используя метод линейного программирования, описанный в параграфе 5.

После нахождения величин $v_0, v_1, \omega_1, \dots, \omega_{n_1+1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2}, q_0, m_0$ надо проверить, выполнены ли следующие требования:

1) энергия диссипации на шарнирах положительна, т.е.

$$(\omega_{i-1} - \omega_i) \tilde{m}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_1 + 2, \quad (1.24)$$

причём $\omega_0 = \omega_{n_1+2} = 0$;

2) изгибающий момент нигде не превосходит предельного момента

$$\begin{aligned} |m(\xi, \tau)| &\leq (\inf(\gamma(\xi-), \gamma(\xi+)))^2, & \xi \in (0, 2), \\ |m(0, \tau)| &\leq \gamma^2(0), \\ |m(2, \tau)| &\leq \gamma^2(2) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если некоторые из неравенств (1.24) нарушаются, то соответствующий шарнир исчезает, а если неравенства (1.25) в некоторой области нарушаются, то в соответствующей точке появляется новый шарнир.

Для вычисления остаточных прогибов можно применить любой метод численного интегрирования. Движение прекращается когда все шарниры исчезают, т.е. все угловые скорости станут равными нулю.

1.4. Структура системы уравнений

В данном параграфе объясним, как составлены матрица и вектор свободных членов системы уравнений (1.23). Предположим, что к моменту τ появилось r внутренних шарниров, координаты которых обозначены через μ_1, \dots, μ_r . Угловые скорости соответствующих элементов балки обозначены через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r+1}$. Тогда вектор неизвестных имеет компоненты

$$\vec{y} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r+1}, \mu_1, \dots, \mu_r, v_0, v_1, \int_0^\tau q_0(\tau) d\tau, \int_0^\tau m_0(\tau) d\tau).$$

Для упрощения записи координаты стационарных шарниров включены в число неизвестных.

Матрица $C = (c_{ij})$ и вектор свободных членов $F = (f_i)$, где $i, j = 1, 2, \dots, 2r + 5$, составлены следующим образом.

Первые две строки C и F соответствуют граничным условиям в левом конце балки.

- 1) если левый конец балки свободный, то согласно формулам (1.17)

$$c_{11} = c_{12} = \dots = c_{1,2r+4} = 0, \quad c_{1,2r+5} = 1, \quad f_1 = 0, \quad (1.26)$$

$$c_{21} = c_{22} = \dots = c_{2,2r+3} = c_{2,2r+5} = 0, \quad c_{2,2r+4} = 1, \quad f_2 = 0; \quad (1.27)$$

- 2) в случае свободно опёртого конца строка (1.26) заменяется строкой

$$c_{21} = c_{22} = \dots = c_{2,2r+1} = c_{2,2r+3} = \dots = c_{2,2r+5} = 0, \quad (1.28)$$

$$c_{2,2r+2} = 1, \quad f_2 = 0;$$

- 3) в случае защемленного левого конца выполняются условия (1.28). В качестве второй строки в зависимости от того, существует ли при $\xi = 0$ шарнир или нет, первая строка имеет вид либо

$$c_{11} = c_{12} = \dots = c_{1,2r+4} = 0, \quad c_{1,2r+5} = 1, \quad f_1 = -\gamma^2(0),$$

либо

$$c_{11} = 1, \quad c_{12} = c_{13} = \dots = c_{1,2r+5} = 0, \quad f_1 = 0.$$

Коэффициенты в третьей строке получены из уравнения (1.12)

$$c_{31} = \mu_1, \quad c_{32} = \mu_2 - \mu_1, \dots, c_{3,r} = \mu_r - \mu_{r-1},$$

$$c_{3,r+1} = 2 - \mu_r, \quad c_{3,r+2} = \omega_1 - \omega_2,$$

$$c_{3,2r+2} = 1, \quad c_{3,2r+3} = -1, \quad c_{3,2r+4} = c_{3,2r+5} = 0, \quad f_3 = 0.$$

Следующие $2r$ строки составлены на основании формулы (1.20). Кроме того, в случае движущегося шарнира одна строка составлена на основании формулы (1.22), а в случае стационарного

шарнира используем формулы $\dot{\mu}_i = 0$. Если μ_i стационарный шарнир, то коэффициенты $(2i + 2)$ -ой строки следующие:

$$c_{2i+2,1} = c_{2i+2,2} = \dots = c_{2i+2,r+i} = c_{2i+2,r+i+2} = \dots = c_{2i+2,2r+5} = 0,$$

$$c_{2i+2,r+i+1} = 1, \quad f_{2i+2} = 0.$$

В случае движущегося шарнира мы получим из формулы (1.22) (здесь k_i является индексом компонента вектора \vec{B} , которая соответствует шарниру μ_i):

$$\begin{aligned} c_{2i+2,1} &= 3 \sum_{j=1}^{k_1-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + 6 \sum_{j=2}^{k_1-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) \beta_j + \\ &+ 6\mu_1 \sum_{j=k_1}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j), \\ c_{2i+2,2} &= 3 \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + 6 \sum_{j=k_1+1}^{k_2-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\beta_j - \mu_1) + \\ &+ 6(\mu_2 - \mu_1) \sum_{j=k_2}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j), \\ c_{2i+2,i-1} &= 3 \sum_{j=k_{i-2}}^{k_{i-1}-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \\ &+ 6 \sum_{j=k_{i-2}+1}^{k_{i-1}-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\beta_j - \mu_{i-2}) + \\ &+ 6(\mu_{i-1} - \mu_{i-2}) \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j), \\ c_{2i+2,i} &= 3 \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + 6 \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\beta_j - \mu_{i-1}), \\ c_{2i+2,i+1} &= c_{2i+2,i+2} = \dots = c_{2i+2,r+1} = 0, \\ c_{2i+2,r+2} &= 6(\omega_1 - \omega_2) \sum_{j=k_1}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j), \\ c_{2i+2,r+3} &= 6(\omega_2 - \omega_3) \sum_{j=k_2}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j), \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
c_{2i+2,r+i} &= 6(\omega_{i-1} - \omega_i) \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j), \\
c_{2i+2,r+i+1} &= c_{2i+2,2r+1} = c_{2i+2,2r+3} = c_{2i+2,2r+5} = 0, \\
c_{2i+2,2r+2} &= 6 \sum_{j=1}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j), \\
c_{2i+2,2r+4} &= 1, \\
f_{2i+2} &= \sum_{\beta_j < \mu_i} P_j + \pi_1(\mu_i, \tau)
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Строка с индексом $(2i+3)$ соответствует уравнению (1.20)

$$\begin{aligned}
c_{2i+3,1} &= \sum_{j=1}^{k_1-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 \beta_j + 3 \sum_{j=2}^{k_1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 \beta_j + \\
&+ 3\mu_1 \sum_{j=k_1+1}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \\
&+ 3 \sum_{j=1}^{k_1-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 (\mu_i - \beta_{j+1}) + \\
&+ 6 \sum_{j=2}^{k_1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j) \beta_j (\mu_i - \beta_{j+1}) + \\
&+ 6\mu_1 \sum_{j=k_1+1}^{k_i-2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j) (\mu_i - \beta_{j+1}), \\
c_{2i+3,2} &= \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^3 + \\
&+ 3 \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 (\beta_j - \mu_1) + \\
&+ 3(\mu_2 - \mu_1) \sum_{j=k_2+1}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 +
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)(\mu_i - \beta_{j+1}) + \\
& + 6 \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)(\beta_j - \mu_1)(\mu_i - \beta_{j+1}) \\
& + 6(\mu_2 - \mu_1) \sum_{j=k_2+1}^{k_i-2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)(\mu_i - \beta_{j+1}) , \\
c_{2i+3,i-1} & = \sum_{j=k_i-2}^{k_{i-1}-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^3 + \\
& + 3 \sum_{j=k_{i-2}+1}^{k_{i-1}-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2(\beta_j - \mu_{i-2}) + \tag{1.32} \\
& + 3(\mu_{i-1} - \mu_{i-2}) \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \\
& + 3 \sum_{j=k_{i-2}}^{k_{i-1}-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2(\mu_i - \beta_{j+1}) + \\
& + 6 \sum_{j=k_{i-2}+1}^{k_{i-1}-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)(\beta_j - \mu_{i-2})(\mu_i - \beta_{j+1}) + \\
& + 6(\mu_{i-1} - \mu_{i-2}) \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)(\mu_i - \beta_{j+1}) , \\
c_{2i+3,i} & = \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^3 + \\
& + 3 \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2(\beta_j - \mu_{i-1}) + \\
& + 3 \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)^2(\mu_i - \beta_{j+1}) + \\
& + 6 \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-2} \gamma_j(\beta_{j+1} - \beta_j)(\beta_j - \mu_{i-1})(\mu_i - \beta_{j+1}), \\
c_{2i+3,i+1} & = c_{2i+3,i+2} = c_{2i+3,r+1} = 0 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2i+3,r+2} &= (\omega_1 - \omega_2) \left[3 \sum_{j=k_1}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{j=k_1}^{k_i-2} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\mu_i - \beta_{j+1}) \right], \\
c_{2i+3,r+3} &= (\omega_2 - \omega_3) \left[3 \sum_{j=k_2}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{j=k_2}^{k_i-2} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\mu_i - \beta_{j+1}) \right],
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
c_{2i+3,r+i} &= (\omega_{i-1} - \omega_i) \left[3 \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i-2} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\mu_i - \beta_{j+1}) \right],
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$c_{2i+3,r+i+1} = c_{2i+3,r+i+2} = \dots = c_{2i+3,2r+1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
c_{2i+3,2r+2} &= 3 \sum_{j=1}^{k_i-1} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j)^2 + \\
&\quad + 6 \sum_{j=1}^{k_i-2} \gamma_j (\beta_{j+1} - \beta_j) (\mu_i - \beta_{j+1}),
\end{aligned}$$

$$c_{2i+3,2r+3} = 0, \quad c_{2i+3,2r+4} = \mu_i, \quad c_{2i+3,2r+5} = 1,$$

$$f_{2i+3} = \sum_{\beta_j < \mu_i} P_j(\mu_i - \beta_j) + \pi_2(\mu_i, \tau) + \tilde{m}(\mu_i)$$

Для определения коэффициентов двух последних строк мы используем граничные условия в правом конце балки. Условие $q(2) = 0$ соответствует формулам (1.29) (принимая в последних $\mu_{r+1} = 2$, $i = r+1$). В случае условия $m(2) = 0$ или $m(2) = -\gamma^2(2)$ коэффициенты матрицы определяются на основании формул (1.31), принимая опять $\mu_{r+1} = 2$, $i = r+1$. Условию $\dot{w}(2) = 0$ соответствует строка

$$c_{j,1} = c_{j,2} = \dots = c_{j,2r+2} = c_{j,2r+4} = c_{j,2r+5} = 0, \quad c_{j,2r+3} = 1, \quad f_j = 0.$$

1.5. Общая схема решения задачи

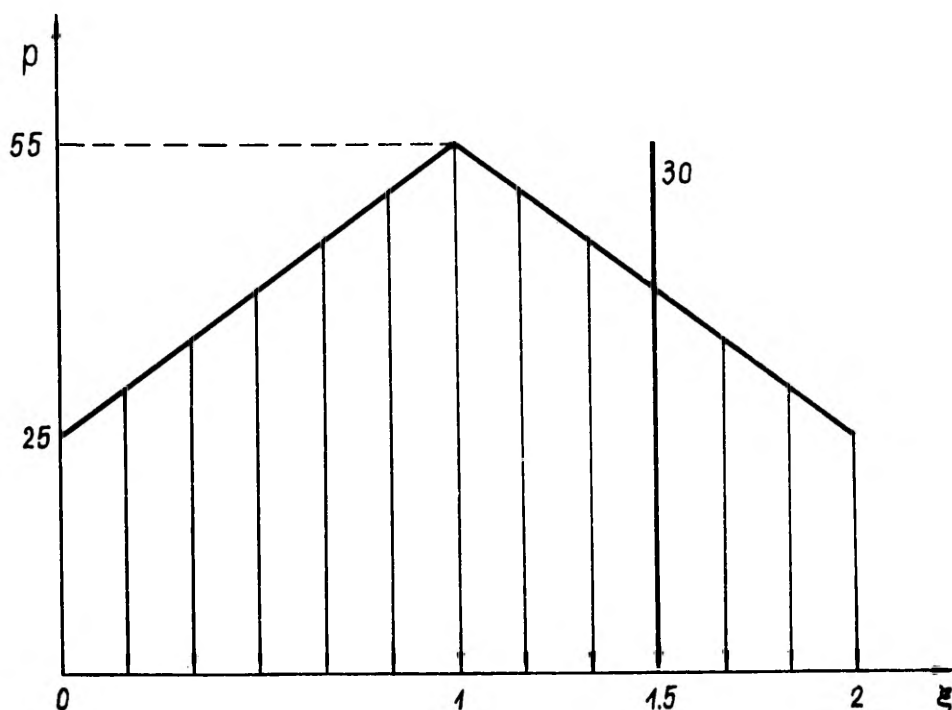
Первой задачей является определение предельной нагрузки. После дискретизации уравнения равновесия (1.7) при $w \equiv 0$ и перехода к новым переменным $m_i^+ = m_i + \gamma^2(\xi_i)$ мы приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned}
 & p_2^m \longrightarrow \max, \\
 & m_{i-1}^+ - 2m_i^+ + m_{i+1}^+ - \gamma^2(\xi_{i-1}) + 2\gamma^2(\xi_i) - \gamma^2(\xi_{i+1}) + \\
 & \quad + p_2^m p_1(\xi_i) (\Delta\xi)^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\
 & m_{i_j-1}^+ - 2m_{i_j}^+ + m_{i_j+1}^+ - \gamma^2(\xi_{i_j-1}) + 2\gamma^2(\xi_{i_j}) - \gamma^2(\xi_{i_j+1}) + \\
 & \quad + p_2^m p_1^j(\xi_{i_j}) (\Delta\xi) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \\
 & m_i^+ - 2\gamma^2(\xi_i) \leq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\
 & m_i^+ \geq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\
 & p_2^m \geq 0
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Здесь через i_j обозначены индексы узловых точек, соответствующие точкам приложения сосредоточенных сил p^j . Если какой-то конец балки свободно опёрт, то прибавляется условие $m_0^+ = \gamma^2(0)$ или/и $m_n^+ = \gamma^2(2)$. Если же в конце опоры совсем нет, то к предыдущему условию прибавляется $m_0^+ - m_1^+ = 0$ или $m_n^+ - m_{n-1}^+ = 0$.

После решения задачи линейного программирования найдём момент времени начала деформирования, решая уравнение $p_2(\tau) = p_2^m$. Мы можем также определить начальное число и координаты пластических шарниров, анализируя найденные значения m_i^+ : если $m_i^+ = 0$ или $m_i^+ = 2\gamma^2(\xi_i)$, то в соответствующей точке появляется новый пластический шарнир.

После определения предельной нагрузки мы можем приступить к интегрированию системы уравнений при помощи метода Рунге-Кутты. При этом надо учитывать изменение размерности системы в ходе решения при появлении или исчезновении пластических шарниров и проверять выполненность неравенств (1.24) и (1.25). Кроме того, приходится экстраполировать некоторые величины, например, энергию диссипации на всех шарнирах, перерезывающие силы в стационарных шарнирах и координаты движущихся шарниров. В конце каждого шага вычисляются приращения остаточных прогибов.

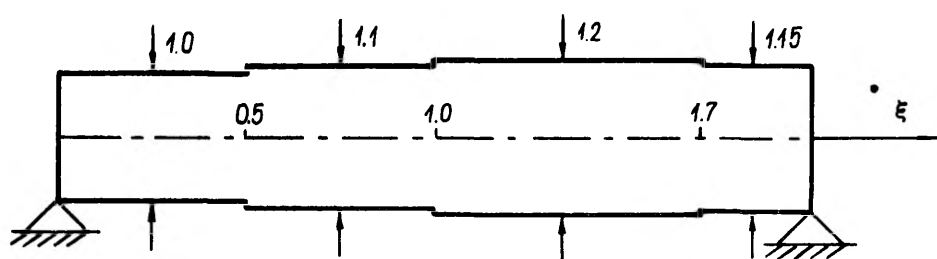


Фиг. 5

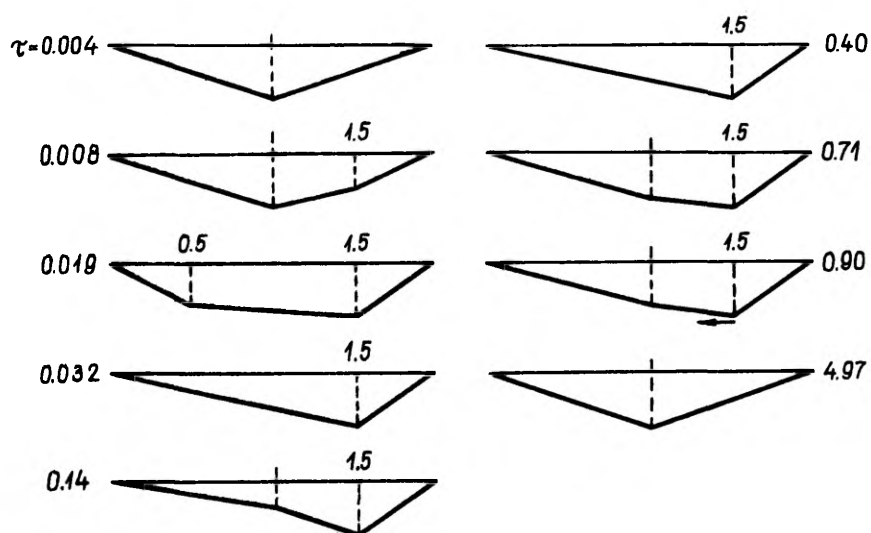
1.6. Примеры

Пример 1. На свободно опёртую четырёхступенчатую балку (фиг. 6) приложена распределённая нагрузка, пространственное распределение которой показано на фиг. 5, и сосредоточенная сила $p_1 = 30$ в точке $\xi = 1.5$. Зависимость нагрузки от времени изображена на фиг. 4. Появление и исчезновение пластических шарниров показано на фиг. 7. Остаточные прогибы показаны на фиг. 8.

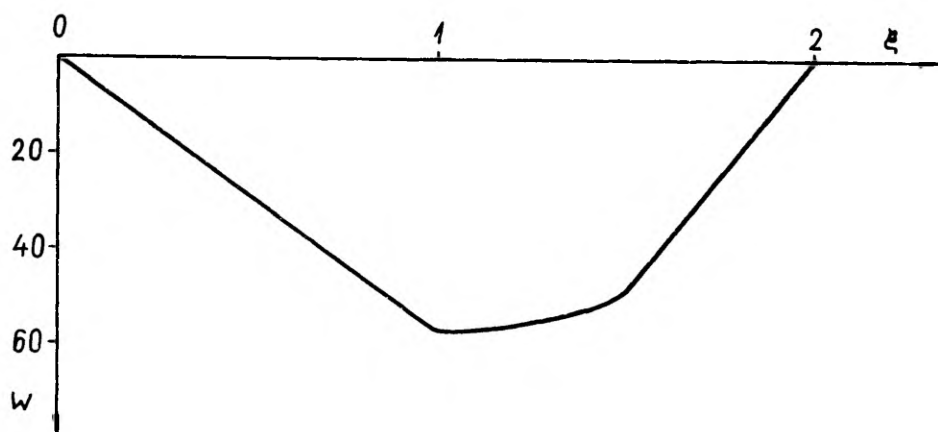
Пример 2. На свободно опёртую трёхступенчатую балку (фиг. 10) приложена распределённая нагрузка, линейно изменяющаяся по длине балки ξ , и сосредоточенные силы (фиг. 9). Зависимость нагрузки от времени изображена на фиг. 4. Появление и исчезновение пластических шарниров показано на фиг. 11. Остаточные прогибы показаны на фиг. 12.



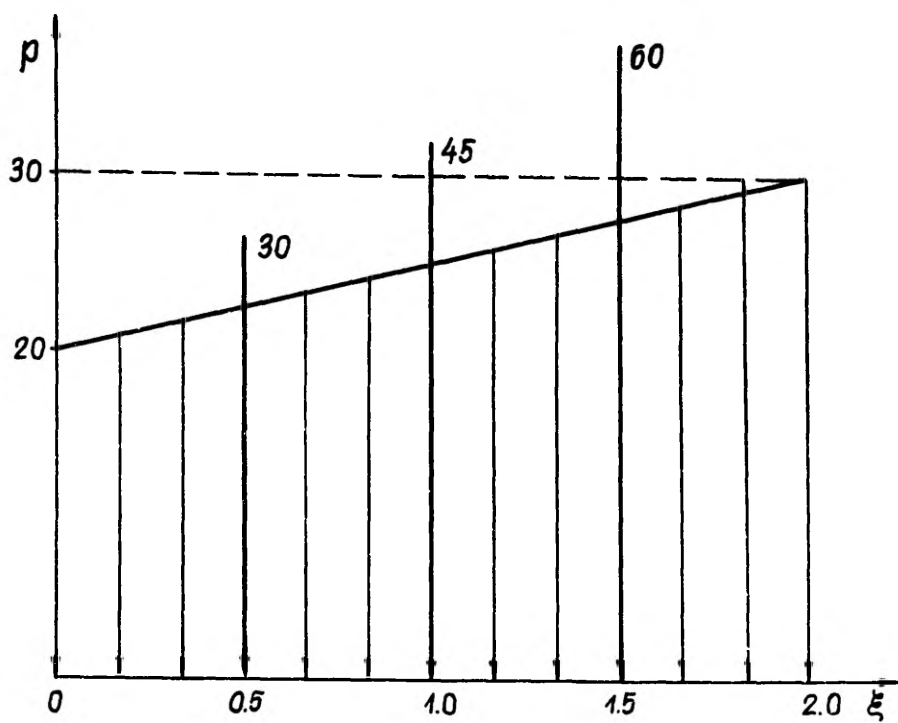
Фиг. 6



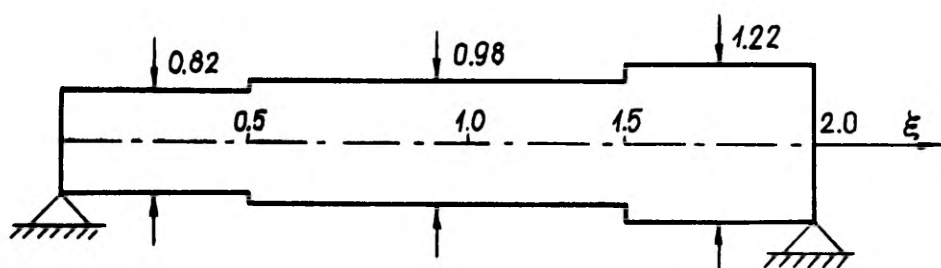
Фиг. 7



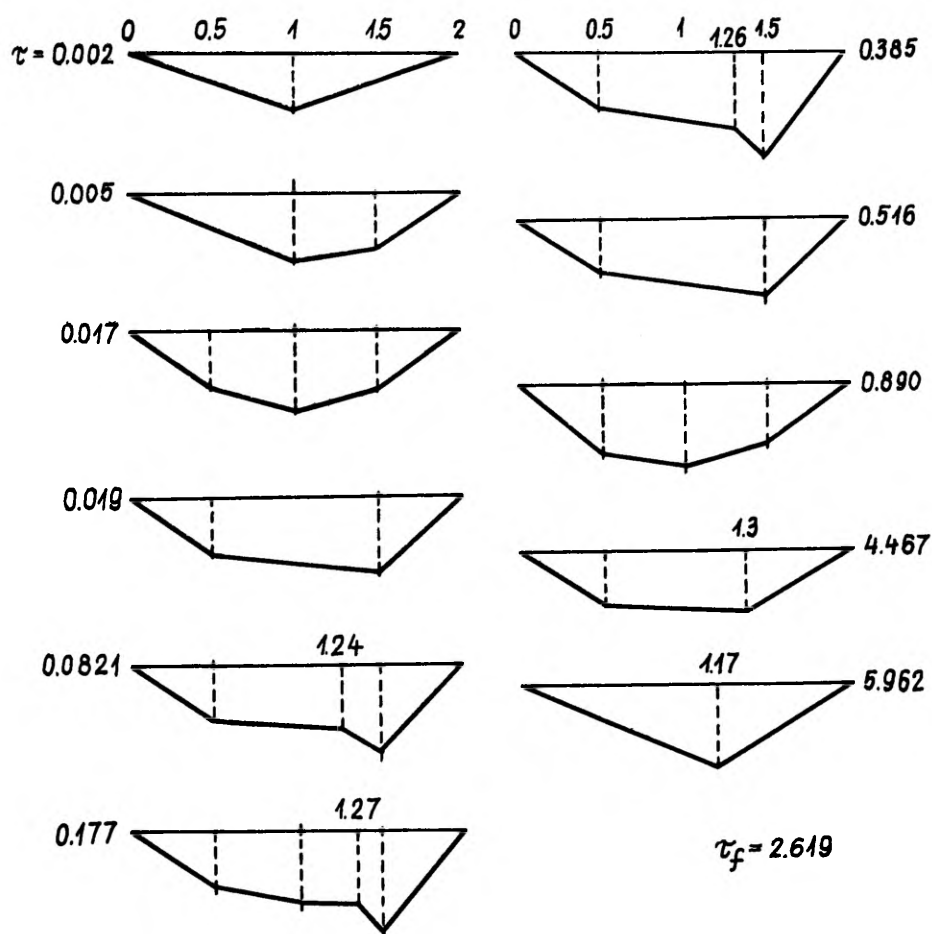
Фиг. 8



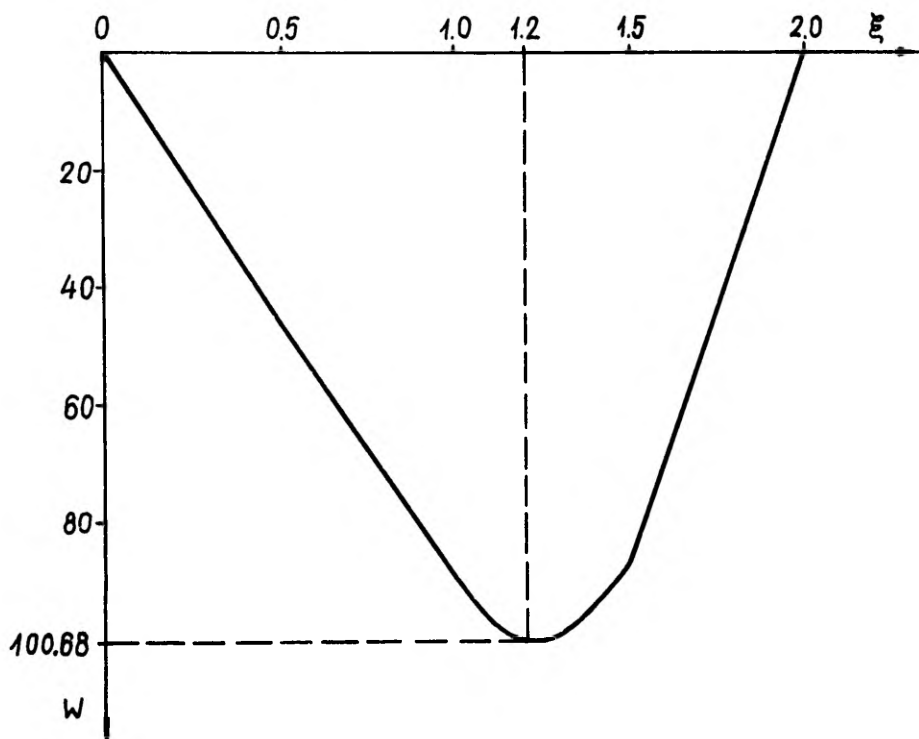
Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим жёсткопластическую ступенчатую балку прямоугольного поперечного сечения, ширина которой постоянна. Закрепление балки не препятствует перемещению в осевом направлении.

Также задана совокупность произвольных поперечных нагрузок, интенсивность которых зависит от времени (фиг. 2).

Поставим следующую задачу. При фиксированном объёме и числе ступеней балки требуется найти такие длины и высоты ступеней чтобы максимальный остаточный прогиб балки после прекращения движения был бы минимален.

2.2. Описание хода решения задачи

Сначала определяем независимые параметры.

Пусть длина балки — $2l$, объём — V , ширина — B и число ступеней — n . Высота балки имеет скачки в сечениях $x = b_i$, $i = 1, \dots, n-1$.

Перейдём к безразмерным величинам

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{b_i}{l}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \gamma_i &= \frac{h_i}{h_*}, & i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

где h_i — высота i -ой ступени балки, а h_* — средняя высота балки.

Поскольку

$$V = Blh_* \sum_{i=1}^n \gamma_i (\beta_i - \beta_{i-1}) = \text{const}, \quad (2.1)$$

где $\beta_0 = 0$ и $\beta_n = 2$, то всего мы имеем $2n-1$ параметров $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, из которых независимых $2n-2$. Один параметр может

быть исключён из требования постоянства объёма балки (2.1), которое равносильно требованию

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (\beta_i - \beta_{i-1}) = 2 \quad (2.2)$$

Если задача симметрична относительно середины балки, то число ступеней — нечётное число n_1 , и, очевидно, что ввиду симметрии число неизвестных параметров равно $n_1 - 1$.

Ограничения для параметров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta_{i-1} < \beta_i < \beta_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ \gamma_i > 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Минимизации подлежит функционал

$$w_{\max}(\beta_1, \beta_{n-1}, \gamma_1, \gamma_n) = \max_{0 \leq \xi \leq 2} w(\xi, \tau_f), \quad (2.4)$$

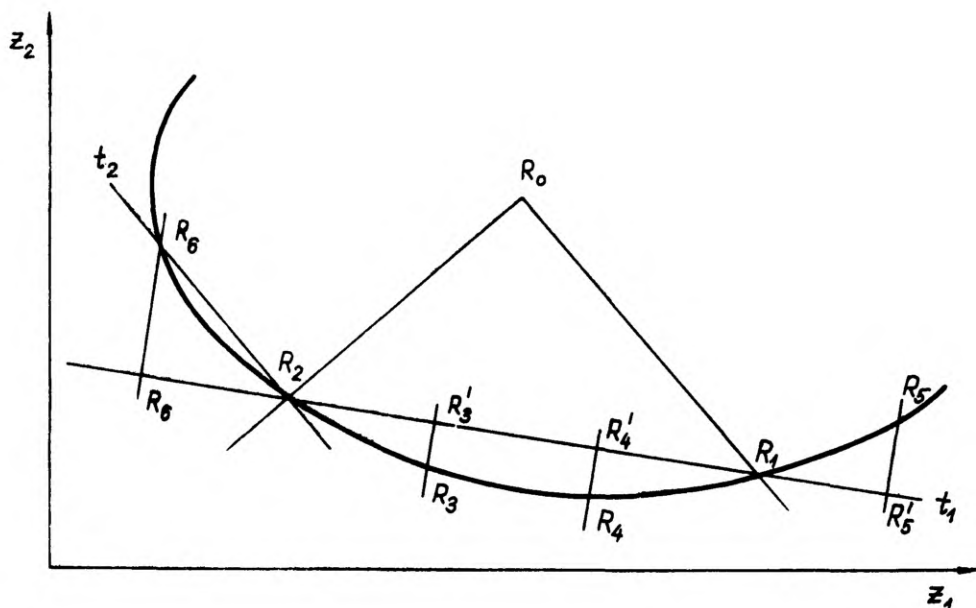
где τ_f — момент прекращения движения, а ξ — безразмерная координата вдоль оси балки.

Таким образом, сформулирована оптимизационная задача (2.2)–(2.4). Диссертантом сделана попытка реализовать решение названной задачи на ЭВМ. Для вычисления значения функционала (2.4) использованы методика и пакет программ, описанные в первой главе.

В ходе решения оптимизационной задачи возникли трудности в связи со спецификой зависимости функционала (2.4) от независимых параметров. Именно, выяснилось, что существуют части гиперповерхности в пространстве допустимых значений параметров, где функционал (2.4) очень мало отличается от его оптимального значения, но вблизи этих частей функционал очень резко возрастает. Большинство из методов определения минимума в таких условиях нестабильны. Но с другой стороны, имея в виду требования практики, вместо определения точки минимума можно ограничиться вычислением названных гиперповерхностей.

Диссертант применил следующую стратегию для определения гиперповерхности оптимальности.

Обозначим независимые переменные через z_i , $i = 1, \dots, k$. Исходя из произвольно выбранной точки R_0 в области допустимых значений независимых параметров, производим однопараметрические оптимизации в k ортогональных направлениях (фиг. 13) (диссертантом сделано это методом золотых сечений). В результате



Фиг. 13

найдем точки R_1, \dots, R_k . Эти точки определяют гиперплоскость в k -мерном пространстве (на фиг. 13 — прямая t_1). На этой гиперплоскости выбираем точки R'_{k+1}, R'_{k+2} и производим однопараметрические оптимизации в направлении, ортогональном к ней. Получим точки R_{k+1}, R_{k+2} , принадлежащие гиперповерхности оптимальности. Если расстояние между точками R'_n и R_n чрезмерно большое, можно исправить положение плоскости с помощью найденных точек R_{k+1}, R_{k+2} (на фиг. 13 — прямые t_2 и t_3). Областью оптимальных значений параметров считаются те области гиперповерхности, на которых

$$\frac{|w(R_{k_i}) - w(R_{k_*})|}{w(R_{k_*})} \leq \varepsilon$$

где ε — заданное положительное число,

$$w(R_{k_*}) = \min_k w(R_k),$$

где R_{k_i} — оптимальные точки.

2.3. Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Требуется найти оптимальные параметры β и $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$ симметричной трёхступенчатой свободно опертой балки (фиг. 14), к которой приложено равномерное давление, изменяющееся во времени по закону

$$p(\tau) = \begin{cases} 20 \exp\left(\frac{\pi(\tau_* - \tau)}{\tan(\pi\tau_*)}\right) \frac{\sin(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau_*)}, & \tau \in [0, 1], \\ 0, & \tau > 1 \end{cases}$$

Число независимых параметров $k = 2$. Гиперповерхностью оптимальности является кривая, показанная на фиг. 16. Избранные два ортогональных направления $\beta = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$, начальная точка $R_0 = (1.5; 0.5)$. Максимальный прогиб, соответствующий оптимальным значениям параметров, составляет около 58% от прогиба балки такого же объёма, но постоянной высоты. Если принять $\varepsilon = 5\%$, то оптимальными можно считать те точки на кривой на фиг. 16, которые удовлетворяют условию $1.17 < \gamma < 2.28$.

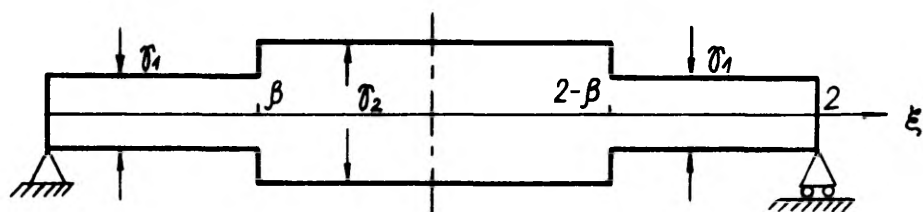
Некоторые значения максимальных прогибов балки при $\beta = 0.5$, приведены в таблице 1. Максимальный прогиб соответствующей балки постоянной высоты $w^* = 3.99$.

таблица 1

γ	w_{max}	γ	w_{max}
1.10	3.64	1.35	3.14
1.15	2.66	1.40	3.29
1.20	2.78	1.45	3.41
1.25	2.88	1.50	3.50
1.30	3.03		

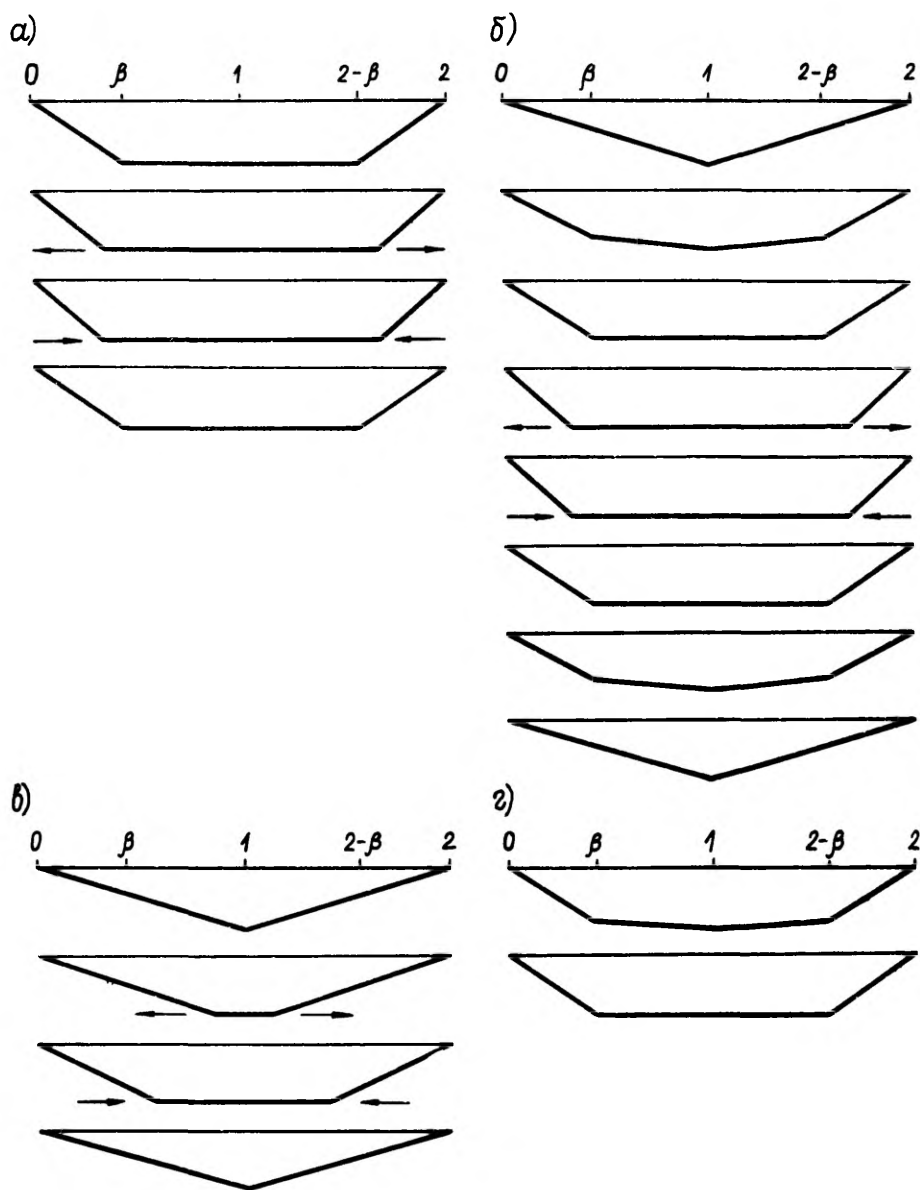
Для иллюстрации поведения минимизируемого функционала вблизи минимума на фиг. 17 приведены некоторые сечения поверхности $w = w(\beta, \gamma)$ в направлениях $\beta = \text{const}$.

При значениях параметров, соответствующих точкам выше кривой на фиг. 16, имеет место следующая картина движения (фиг. 15а) При достижении предельной нагрузки возникают пластические шарниры в точках скачков высоты $\xi = \beta$ и $\xi = 2 - \beta$. При увеличении давления они дестабилизируются и начинают двигаться в направлении концов балки. В фазе убывания нагрузки они вновь движутся

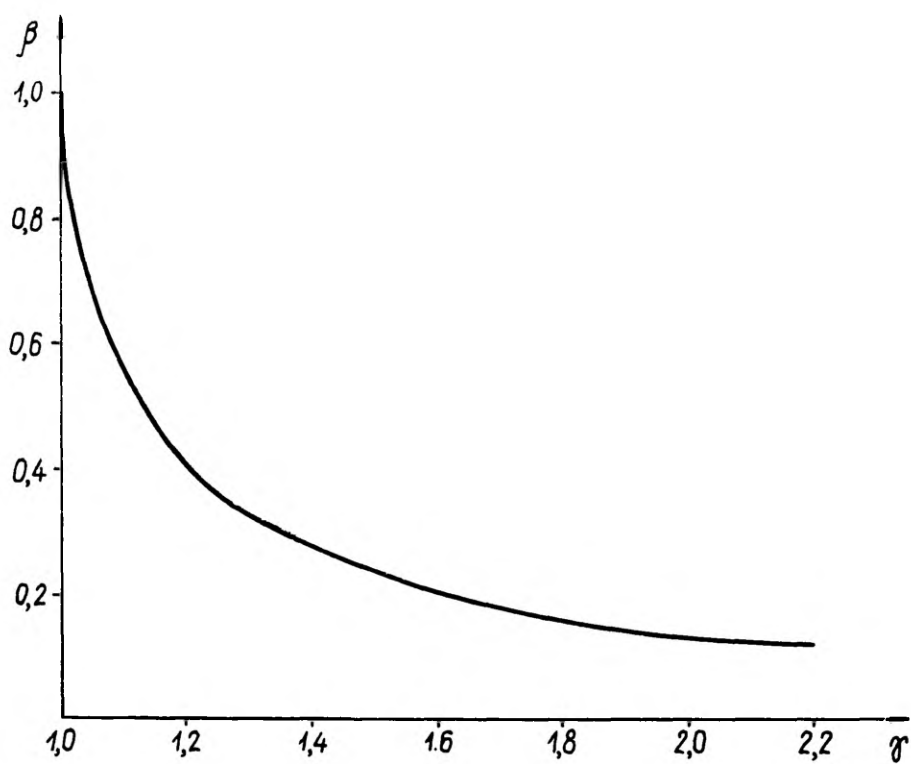


Фиг. 14

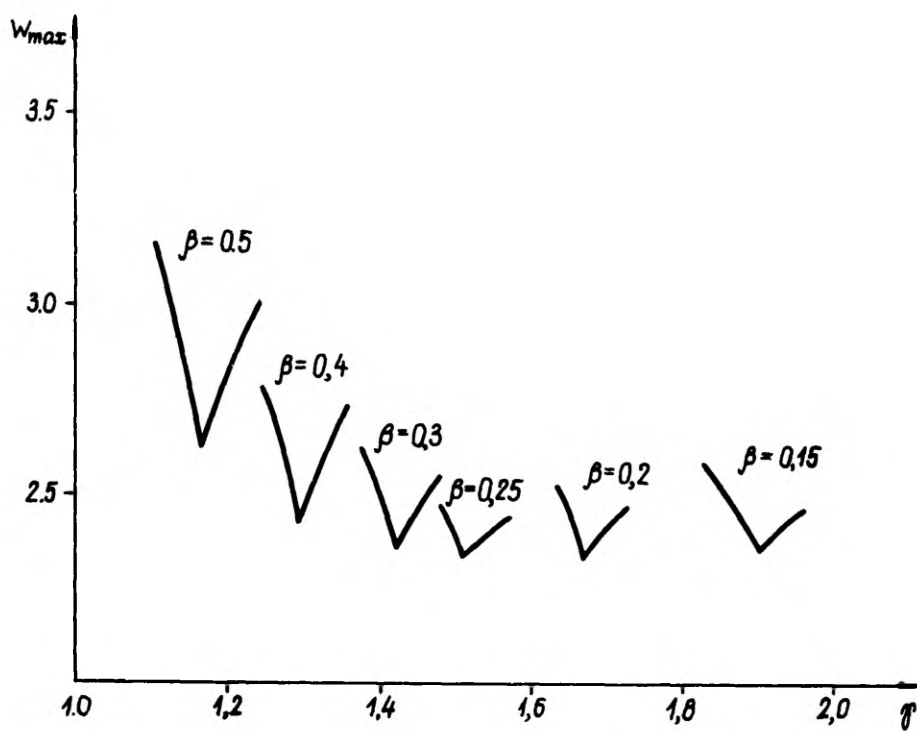
в направлении середины балки, останавливаются в сечениях $\xi = \beta$ и $\xi = 2 - \beta$ и, наконец, исчезают. В области параметров ниже кривой на фиг. 16 сначала возникает шарнир в середине балки. Через некоторое время он заменяется или двумя шарнирами в сечениях скачков, или, если $\gamma \approx 1$, двумя шарнирами вблизи середины балки. Дальнейшее поведение балки выясняется на фиг. 15б и фиг. 15в. На кривой оптимальности реализуется переход от режима деформирования а) к б) или в) соответственно (фиг. 15г). При достижении предельной нагрузки возникают три шарнира, средний из которых сразу исчезает. В фазе убывания нагрузки и инерционного движения замена механизмов движения всегда происходит в обратном порядке и с противоположными скоростями пластических шарниров по сравнению с фазой возрастания нагрузки.



Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17

3. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ СТУПЕНЧАТЫХ БАЛОК С ФИКСИРОВАННЫМИ КОНЦАМИ

3.1. Постановка задачи

На жёсткопластическую балку кусочно-постоянной высоты и прямоугольного поперечного сечения в некотором промежутке времени действует поперечная нагрузка. Концы балки могут быть заземлены или свободно опёрты. Опоры не могут перемещаться в осевом направлении, так что при изгибании балки возникают продольные силы. Предполагаем, что максимальная нагрузка выше предельной. Тогда некоторые части балки (или вся балка) переходят в пластическое состояние. Движение балки кончается в момент времени, когда вся кинетическая энергия, приобретённая в процессе нагружения, расходуется на пластическую работу. Поставим задачу найти остаточные прогибы балки. Остаточные прогибы предполагаем настолько малыми, что продольную силу, возникающую в процессе деформирования, можно считать постоянной по длине балки.

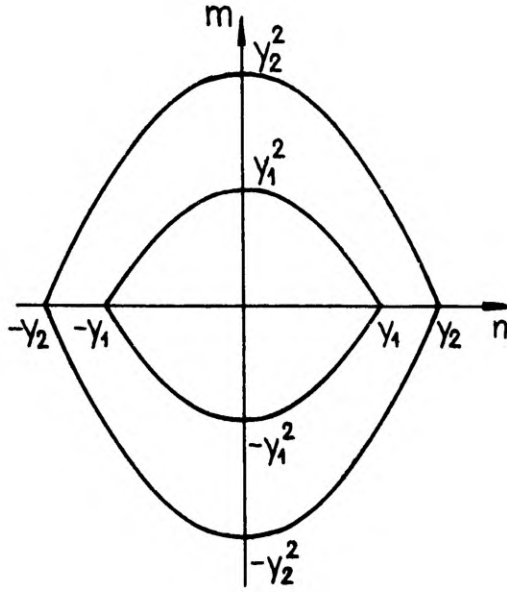
3.2. Основные уравнения

Представим уравнение движения балки в виде

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = -N(t) \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + \rho B h(x) \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} - P(x, t), \quad (3.1)$$

где $W(x, t)$ — прогиб, $M(x, t)$ — изгибающий момент, $N(x, t)$ — продольная сила, B , h — ширина и высота балки соответственно, ρ — плотность материала, x — координата вдоль оси балки, t — время, $P(x, t)$ — давление.

Введём ещё следующие обозначения: V и $2l$ — объём и длина балки соответственно, $h_* = V/(2Bl)$ — средняя высота, σ_0 — предел текучести материала. Тогда кривая предельного состояния сечения балки имеет вид



Фиг. 18

$$\frac{M}{M_s} = \pm \left(\left(\frac{h(x)}{h_*} \right)^2 - \left(\frac{N}{N_s} \right)^2 \right), \quad (3.2)$$

где M_s и N_s — соответственно предельный изгибающий момент и продольная сила для балки постоянной высоты того же объема. В безразмерных величинах эта кривая изображена на фиг. 18. Этой кривой соответствует ассоциированный закон течения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} &= \pm \frac{2NM_s}{N_s^2} \frac{\partial \kappa^*}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial \kappa^*}{\partial t} = - \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В последних формулах через U обозначено перемещение вдоль оси балки, а через ε^* и κ^* — обобщенные скорости деформации.

Введём следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \quad \alpha_i = \frac{b_i}{l}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \gamma(\xi) = \frac{h(\xi l)}{h_*}, \\ n(\xi, \tau) &= \frac{2N(\xi l, T\tau)l}{\sigma_0 V}, \quad p(\xi, \tau) = \frac{8Bl^4}{\sigma_0 V^2} P(\xi l, T\tau), \quad \lambda = \frac{\sigma_0 T^2}{\rho l^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(\xi, \tau) &= \frac{4M(\xi l, T\tau)}{\sigma_0 B h_*^2}, \quad w(\xi, \tau) = \frac{4\rho B l^3}{3\sigma_0 V T^2} W(\xi l, T\tau), \\
u(\xi, \tau) &= l \left(\frac{4\rho B l^3}{3\sigma_0 V T^2} \right)^2 U(\xi l, T\tau), \\
\varepsilon &= \frac{4\rho B l^4}{3\sigma_0 V T^2} \varepsilon^*, \quad \kappa = \frac{4\rho B l^5}{3\sigma_0 V T^2} \kappa^*,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где T — момент снятия нагрузки, b_k — координаты, в которых высота балки изменяется скачком.

Уравнения (3.1)–(3.3) в безразмерной форме имеют вид

$$m''(\xi, \tau) = -6\lambda n(\xi, \tau)w''(\xi, \tau) + 6\gamma(\xi)\ddot{w}(\xi, \tau) - p(\xi, \tau), \tag{3.5}$$

$$m = \pm(\gamma^2 - n^2), \tag{3.6}$$

$$3\lambda\dot{\varepsilon} = \pm n\dot{\kappa}, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{u}' + w'\dot{w}', \quad \dot{\kappa} = -\dot{w}'', \tag{3.7}$$

где штрихами обозначены производные по ξ , а точками — по τ

3.3. Интегрирование уравнений движения

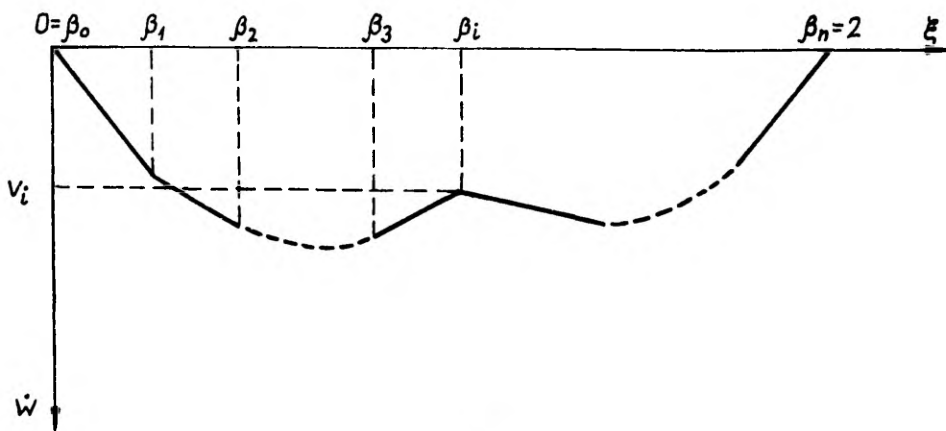
В ходе нагружения в балке возникают пластические шарниры и пластические зоны. Между ними материал балки остаётся жёстким. Шарниры и границы зон могут двигаться вдоль оси балки. Эпюра скоростей прогиба балки между её концами и пластическими зонами является кусочно-линейной непрерывной кривой (фиг. 19). Через $B = \{\beta_i : i = 0, \dots, n\}$ обозначена совокупность координат концов балки, границ пластических зон и пластических шарниров.

Рассмотрим интегрирование уравнений движения. На участках, не содержащих пластических зон, скорости прогибов полностью определяются элементами совокупности B и скоростями прогибов v_i , где v_i определены на фиг. 19.

Скорость прогибов на участке, не являющемся пластической зоной и расположенном между элементами совокупности B β_i и β_{i+1} , определяется формулой

$$\dot{w}(\xi, \tau) = v_i + \frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} (\xi - \beta_i). \tag{3.8}$$

Обозначим через $H = \{\eta_i\}$ множество координат всех шарниров, границ пластических зон, скачков высоты, концов балки и точек разрыва величин w'' (т.е. точек разрыва правой части формулы



Фиг. 19

(3.5)). Продифференцируем последнее соотношение по τ . Получим

$$\ddot{w}(\xi, \tau) = \frac{1}{\beta_{i+1} - \beta_i} \begin{pmatrix} \beta_{i+1} - \xi \\ \xi - \beta_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{v}_i & \dot{\beta}_i \\ \dot{v}_{i+1} & \dot{\beta}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Проинтегрируем последние соотношения дважды по ξ . Получим

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\xi} \ddot{w}(\xi, \tau) d\xi &= I_{i,j}^1(\xi, \tau) = \\ &= \frac{\xi - \eta_j}{2(\beta_{i+1} - \beta_i)} \begin{pmatrix} 2\beta_{i+1} - \eta_j - \xi \\ \eta_j + \xi - 2\beta_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{v}_i & \dot{\beta}_i \\ \dot{v}_{i+1} & \dot{\beta}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} \end{pmatrix}, \\ \int_{\eta_j}^{\xi} d\xi \int_{\eta_j}^{\xi} \ddot{w}(\zeta, \tau) d\zeta &= I_{i,j}^2(\xi, \tau) = \\ &= \frac{(\xi - \eta_j)^2}{6(\beta_{i+1} - \beta_i)} \begin{pmatrix} 3\beta_{i+1} - 2\eta_j - \xi \\ 2\eta_j + \xi - 3\beta_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{v}_i & \dot{\beta}_i \\ \dot{v}_{i+1} & \dot{\beta}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} \end{pmatrix}, \\ &\quad \xi \in [\eta_j, \eta_{j+1}] \subseteq [\beta_i, \beta_{i+1}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Обозначим символами $m_+(\xi, \tau)$ и $m'_+(\xi, \tau)$ ту часть величин $m(\xi, \tau)$ и $m'(\xi, \tau)$, которая не зависит от давления $p(\xi, \tau)$. Проинтегрируем соотношения (3.5) дважды по ξ , учитывая соотношения (3.10). Получим рекуррентные связи

$$m'_+(\xi, \tau) = m'_+(\beta_i, \tau) - 6\lambda n(w'(\xi-) - w'(\beta_i+)) -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{j \\ \beta_i \leq \eta_j \leq \eta_k}} (w'(\eta_j+) - w'(\eta_j-)) + \\
& + 6 \left(\sum_{\substack{j \\ \beta_i \leq \eta_j < \eta_k}} \gamma(\eta_j+) I_{i,j}^1(\eta_{j+1}) + \gamma(\eta_k+) I_{i,k}^1(\xi) \right), \\
m_+(\xi, \tau) = & m_+(\beta_i, \tau) - 6\lambda n \left(w(\xi) - w(\beta_i) - w'(\beta_i+)(\xi - \beta_i) - \right. \\
& - \sum_{\substack{j \\ \beta_i < \eta_j \leq \eta_k}} (w'(\eta_j+) - w'(\eta_j-))(\xi - \beta_i) \Big) + \\
& + 6 \left(\sum_{\substack{j \\ \beta_i \leq \eta_j < \eta_k}} \gamma(\eta_j+) I_{i,j}^2(\eta_{j+1}) + \gamma(\eta_k+) I_{i,k}^2(\xi) \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Для функций $m(\xi, \tau)$ и $m'(\xi, \tau)$ получим формулы

$$\begin{aligned}
m'(\xi, \tau) &= m'_+(\xi, \tau) - \int_{\beta_{k_0}}^{\xi} p(\xi, \tau) d\xi, \\
m(\xi, \tau) &= m_+(\xi, \tau) - \int_{\beta_{k_0}}^{\xi} d\xi \int_{\beta_{k_0}}^{\xi} p(\zeta, \tau) d\zeta
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Расчёт начинается со значений $m'_+(\beta_{k_0}, \tau) = m'_0(\tau)$ и $m_+(\beta_{k_0}, \tau) = m_0(\tau)$ (символами $m_0(\tau)$ и $m'_0(\tau)$ обозначены значения изгибающего момента и его производной в каком-то фиксированном элементе $\beta_{k_0} \in B$).

В пластических зонах должно выполняться условие

$$m(\xi, \tau) = \pm(\gamma^2(\xi) - n^2(\tau)) = c(\tau) \tag{3.13}$$

Отсюда следует, что $m'' = 0$, $\xi \in [\beta_k, \beta_{k+1}]$. Из уравнения (3.5) следует тогда

$$\ddot{w} = \frac{\lambda n}{\gamma} w'' + \frac{1}{6\gamma} p(\xi, \tau) \tag{3.14}$$

Последнее уравнение является уравнением в частных производных гиперболического типа.

3.4. Система уравнений для определения ускорений

Допустим, что к какому-то моменту времени нам известны прогибы $w(\xi, \tau)$, поле скоростей прогибов $\dot{w}(\xi, \tau)$ и продольная сила n . Обсудим, как определить ускорения прогибов.

В пластических зонах определим ускорения по формуле (3.14). Из формулы (3.9) вытекает, что на остальных участках достаточно определить величины $\dot{\beta}_i$ и \dot{v}_i , $i = 0, \dots, n$.

Рассмотрим часть балки, ограниченную справа и слева концами балки и/или пластическими зонами и не содержащую пластических зон. Допустим, что имеется m элементов β_i , таких что

$$\beta_{k_1} \leq \beta_i \leq \beta_{k_2}, \quad \text{где} \quad \beta_{k_1}, \beta_{k_2} \in B$$

являются соответственно левой и правой границами рассматриваемой части балки. Допустим, что l из них таковы, что $\gamma(\beta_i-) = \gamma(\beta_i+)$ (в общем случае такие шарниры и границы пластических зон являются нестационарными, т.е. $\beta_i \neq 0$). Неизвестными являются m величин \dot{v}_i , l величин $\dot{\beta}_i$, m_0 и m'_0 . В общей сложности получается $m + l + 2$ неизвестных. Система уравнений для их определения получим из следующих условий.

- 1) Если β_i является координатой пластического шарнира или границей пластической зоны, то должно быть

$$m(\beta_i) = \pm(\gamma_m^2(\beta_i) - n^2),$$

где $\gamma_m(\xi) = \inf(\gamma(\xi-), \gamma(\xi+))$; если β_i является координатой свободного опирания балки, то

$$m(\beta_i) = 0;$$

если у координаты β_i балка заделана и там нет шарнира, то

$$\dot{v}_{i+1} = \dot{v}_i \text{ или } \dot{v}_{i-1} = \dot{v}_i.$$

- 2) У каждой границы участка мы имеем по одному условию для \dot{v}_i : если β_i является координатой конца балки, то $\dot{v}_i = 0$; если же в этой точке находится граница пластической зоны, тогда из уравнений (3.9) вытекает, что

$$\dot{v}_i - \dot{\beta}_i \frac{v_i - v_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}} - \ddot{w}(\beta_i+) = 0$$

в правом конце или

$$\dot{v}_i - \dot{\beta}_i \frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} - \ddot{w}(\beta_i-) = 0$$

в левом конце. Последние члены в левых частях этих уравнений придётся вычислить по формуле (3.14).

3) Если $\gamma(\beta_i-) = \gamma(\beta_i+)$, тогда $m'(\beta_i) = 0$.

Из условий 1) мы получим m уравнений, из условий 2) — два и из условий в) — l уравнений, в общей сложности $m + l + 2$ уравнения. Эта система уравнений является линейной относительно искомых переменных. При составлении этой системы придётся рекуррентно вычислить её коэффициенты, используя соотношения (3.11) и (3.12).

Эта система является сингулярной в двух случаях:

- 1) если балка является статически неопределённой и нет ни пластических зон, ни шарниров;
- 2) если существует шарнир β_i такой, что

$$\gamma(\beta_i+) = \gamma(\beta_i-)$$

и

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}}$$

(такая ситуация имеет место при возникновении новых и исчезновении старых шарниров).

3.5. Определение продольной силы

При определении продольной силы исходим из ассоциированного закона течения (3.7). На жёстких участках $\kappa = \dot{\epsilon} = 0$. Из третьего уравнения (3.7) следует, что

$$\dot{w}' = c(\tau) = \frac{v_{i+1} - v_i}{\beta_{i+1} - \beta_i},$$

где β_i является координатой начала жёсткого участка. Применяя теперь вторую из формул (3.7), получим

$$\dot{u}(\beta_{i+1}-) = \dot{u}(\beta_i+) - (w(\beta_{i+1}) - w(\beta_i)) \dot{w}'(\beta_i+). \quad (3.15)$$

Исключая из уравнений (3.7) величины $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\kappa}$, находим

$$3\lambda(\dot{u}' + w'\dot{w}') = \pm n\dot{w}'' \quad (3.16)$$

Проинтегрируем последнее соотношение в границах от $\beta_i - \delta$ до $\beta_i + \delta$ и перейдём к пределу $\delta \rightarrow 0$. Учитывая, что величина $w'\dot{w}'$ — ограниченная, получим

$$\dot{u}(\beta_i+) = \dot{u}(\beta_i-) - \text{sign}(m(\beta_i)) \frac{n}{3\lambda} (\dot{w}'(\beta_i+) - \dot{w}'(\beta_i-)). \quad (3.17)$$

Интегрируя соотношение (3.16) в пластической зоне, получим

$$\dot{u}(\beta_{i+1}-) = \dot{u}(\beta_i+) - \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} w'\dot{w}'d\xi - \frac{n}{3\lambda} |\dot{w}'(\beta_{i+1}-) - \dot{w}'(\beta_i+)| \quad (3.18)$$

Применяя формулы (3.15), (3.17) и (3.18), проходим постепенно весь отрезок $\xi \in [0, 2]$. Учитывая, что $u(0-) = u(2+) = 0$, $\dot{w}'(0-) = \dot{w}'(2+) = 0$ и обозначая

$$\begin{aligned} I_r &= \{i : |m(\beta_i+)| < \gamma^2(\beta_i+) - n^2\}, \\ I_p &= \{i : |m(\beta_i+)| = \gamma^2(\beta_i+) - n^2\}, \end{aligned}$$

получим

$$n = -3\lambda \frac{\sum_{i \in I_r} \dot{w}'(\beta_i+)(w(\beta_{i+1}) - w(\beta_i)) + \sum_{i \in I_p} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} w'\dot{w}'d\xi}{\sum_{i=0}^n \text{sign}(m(\beta_i)) \cdot (\dot{w}'(\beta_i+) - \dot{w}'(\beta_i-)) - \sum_{i \in I_p} |\dot{w}'(\beta_{i+1}-) - \dot{w}'(\beta_i+)|}. \quad (3.19)$$

Если значение продольной силы, вычисленное по последней формуле, превосходит её предельное значение, т.е. если $n > n_{\max} = \min_{0 \leq \xi \leq 2} \gamma(\xi)$, то придётся положить $n = n_{\max}$. В этом случае часть балки (или вся балка) переходит в мембранное состояние (безмоментное пластическое состояние).

3.6. Ход решения задачи

Определение предельной нагрузки описано в главе 1.

Рассмотрим шаг интегрирования. Сначала составим систему (или системы) уравнений для определения производных, описание которой (или которых) приведено в пункте 4. Если эта система является сингулярной по причине 2), то заменим уравнение $m'(\beta_{i_0}) = 0$ уравнением $\dot{\beta}_{i_0} = 0$, где β_{i_0} — координата шарнира, где $\dot{w}'(\beta_{i_0}+) = \dot{w}'(\beta_{i_0}-)$.

Решая эту систему относительно производных, мы можем провести шаг интегрирования (или при использовании многоточечных методов промежуточный шаг). Так как в систему уравнений входят значения прогибов шарниров, то придётся провести ещё шаг интегрирования тривиальной системы уравнений $\dot{w}_i = v_i$, где $w_i = w(\beta_i)$.

Затем проводим шаг интегрирования пластических зон. Это можно провести методом конечных разностей, но если при решении остальных систем применять, например, метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, то кажется более естественным применение метода прямых, причём получающиеся при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируем опять методом Рунге-Кутты. Краевыми условиями являются либо $w(\beta_i) = 0$, если β_i является координатой конца балки, либо $w(\beta_i) = w_i$, если одна из границ участка интегрирования совпадает с координатой β_i .

После каждого шага (или промежуточного шага) определим значение продольной силы n по формуле (3.18).

Придётся также проверить, выполняется ли условие

$$|m(\xi, \tau)| < \gamma^2 - n^2 \quad (3.20)$$

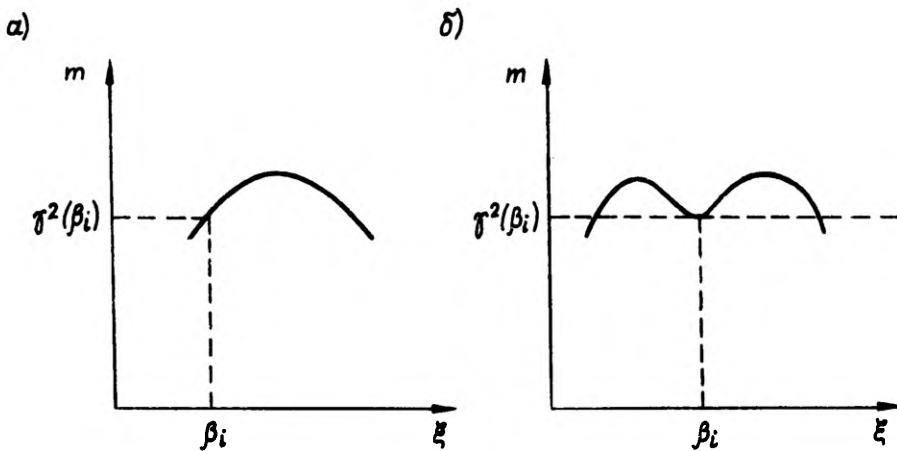
Значение момента в последнем неравенстве придётся вычислить по формулам (3.11)–(3.12). Если в какой-то точке это условие не выполнено, то там появляется новый пластический шарнир или старый шарнир переходит в пластическую зону. Последний случай реализуется, если условие (3.20) нарушается в непосредственной близости шарнира (фиг. 20).

Ещё надо проверить, выполнено ли требование неотрицательности диссипации энергии

$$\text{sign}(m(\beta_i))(\dot{w}'(\beta_i-) - \dot{w}'(\beta_i+)) \geq 0 \quad (3.21)$$

в пластических шарнирах и

$$-m\dot{w}'' + n(\dot{u}' + w'\dot{w}') \geq 0 \quad (3.22)$$



Фиг. 20

в пластических зонах.

Если неравенство (3.21) где-то нарушается, то соответствующий шарнир исчезает. Если же нарушается неравенство (3.22), то в соответствующей точке материал балки переходит в жёсткое состояние.

Если балка находится в мембранном состоянии, то в безмоментных пластических зонах $\dot{\epsilon}$ не определяется единственным образом и поэтому неравенство (3.22) непосредственно неприменимо.

Мембранное состояние реализуется только тогда, когда напряженное состояние сечения балки находится в угловой точке кривой текучести. Это значит, что соотношение (3.16) не действует и вместо него имеет место неравенство

$$|\dot{\epsilon}| \leq \frac{n}{3\lambda} |\dot{\kappa}| \quad (3.23)$$

С другой стороны, поскольку в пластических зонах мембранного состояния $m \equiv 0$, то из неравенства (3.22) находим, что

$$\dot{\epsilon} \geq 0. \quad (3.24)$$

Обозначим через

$$I_p^m = \{i \in I_p : m(\beta_i+) \equiv 0\}$$

совокупность координат левых границ пластических зон в мембранном состоянии,

$$\dot{\epsilon}_i = (\dot{u}' + w' \dot{w}') \Big|_{\xi=\xi_i}, \quad (3.25)$$

$$s_i = \dot{u}(\beta_i+) - \dot{u}(\beta_i-) \quad (3.26)$$

Из неравенства (3.24) следует, что

$$\dot{\epsilon}_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad s_i \leq \frac{n}{3\lambda} |\dot{w}'(\beta_i+) - \dot{w}'(\beta_i-)| \quad (3.27)$$

Проинтегрируем формально соотношение (3.25) и дискретизируем интеграл в левой части. Получим

$$\sum_j c_j \dot{\epsilon}_j = \dot{u}(\beta_{i+1}-) - \dot{u}(\beta_i+) + \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} w' \dot{w}' d\xi \quad (3.28)$$

Применяя формулы (3.15), (3.17), (3.18), (3.26) и (3.28), мы находим

$$\begin{aligned} \sum_j c_j \dot{\epsilon}_j + \sum_{i \in I_p^m} (s_i + s_{i+1}) - \sum_{i \in I_p} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} w' \dot{w}' d\xi - \\ \sum_{i \in I_r} \dot{w}'(\beta_i+) \left(w_{i+1} - w_i + \frac{n}{3\lambda} (\text{sign}(m(\beta_{i+1})) - \text{sign}(m(\beta_i))) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Соотношения (3.24), (3.27), (3.23) и (3.29) могут быть интерпретированы системой ограничений какой-то задачи линейного программирования. Если она окажется противоречивой (а это значит, что $\dot{\epsilon}$ нельзя определить), то считаем, что балка выходит из мембранного состояния.

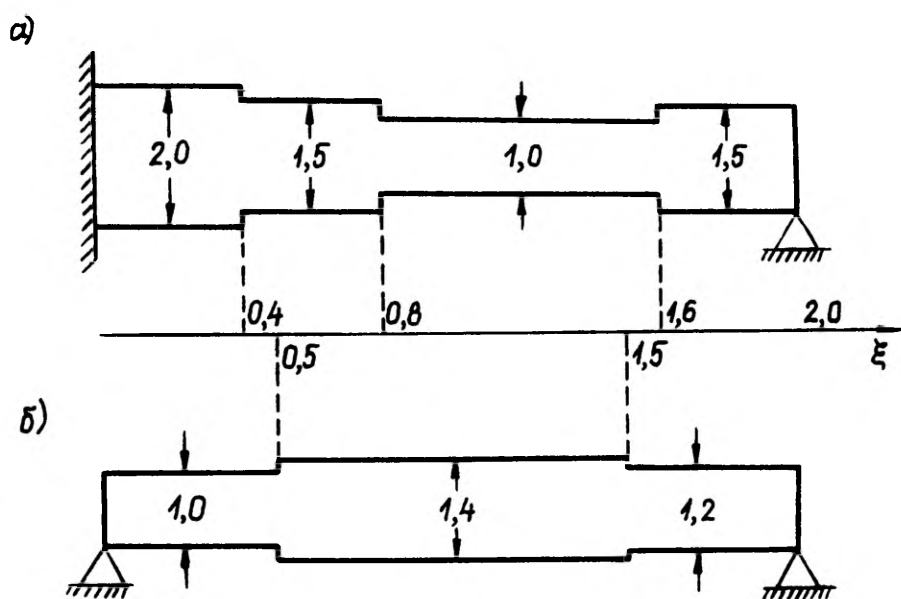
Движение заканчивается, когда все пластические зоны и шарниры исчезают.

3.7. Примеры

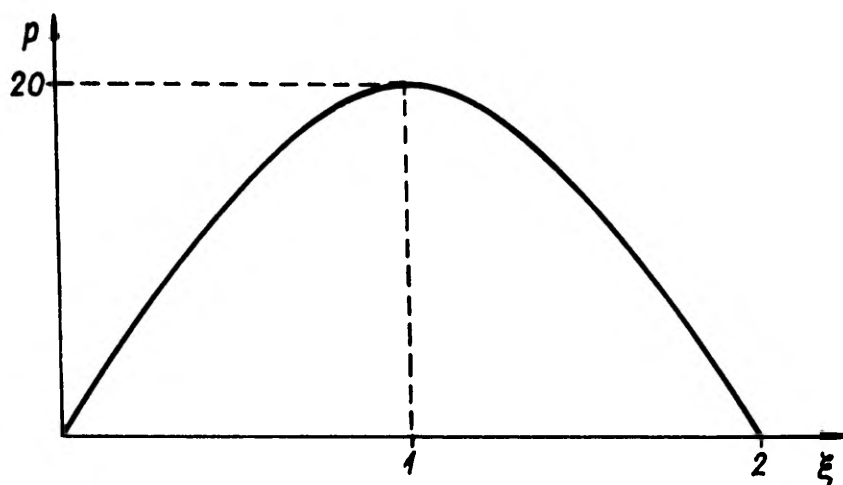
Приведём два численных примера. Конфигурации балок приведены на фиг. 21. Нагрузка

$$p(\xi, \tau) = 20 \exp \left(\frac{\pi(0.2 - \tau)}{\tan(0.2\pi)} \right) \frac{\sin(\pi\tau)}{\sin(0.2\pi)} \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right)$$

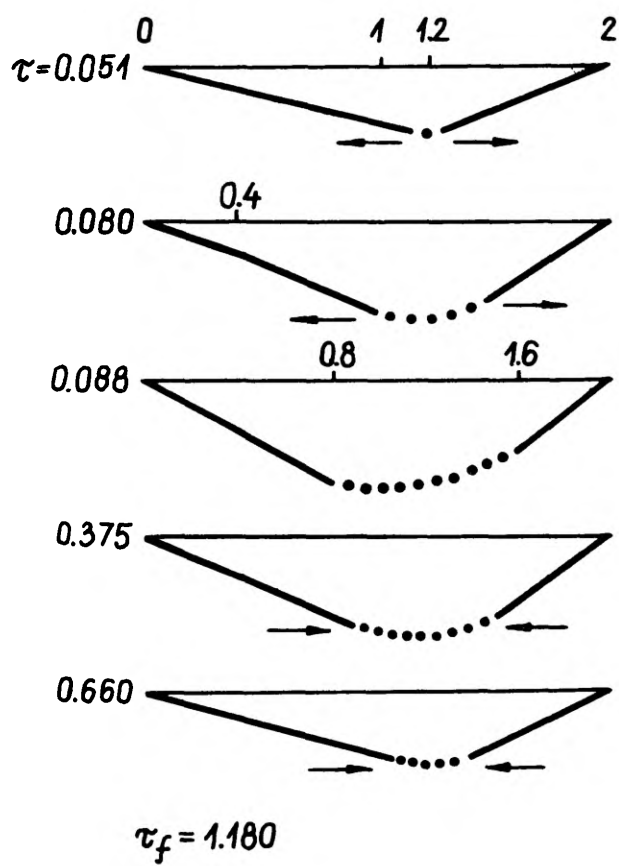
изображена на фиг. 22. Картины появления и исчезновения шарниров и пластических зон показаны на фиг. 23 и фиг. 24 (пунктиром изображена пластическая зона). Конечные прогибы показаны на фиг. 25 и фиг. 26.



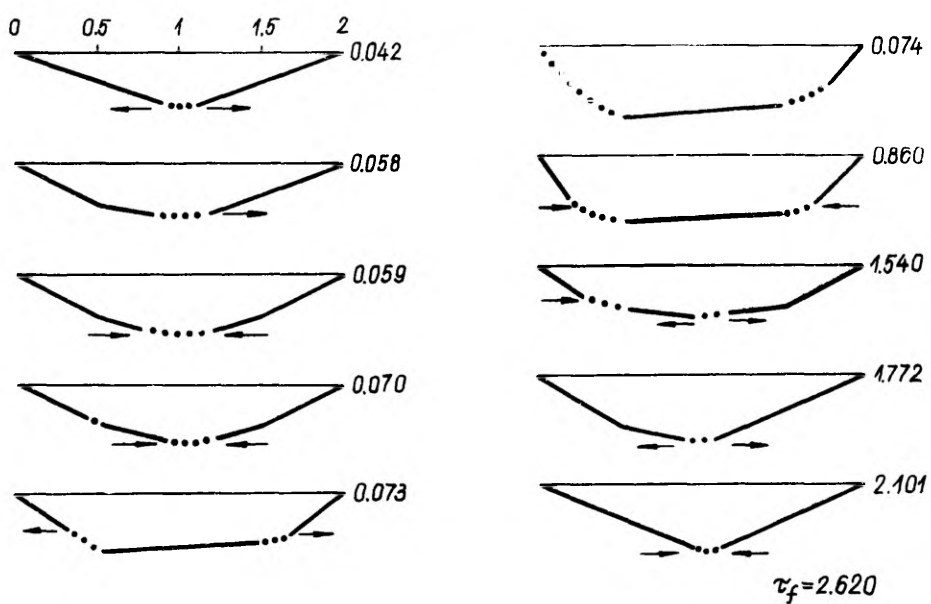
Фиг. 21



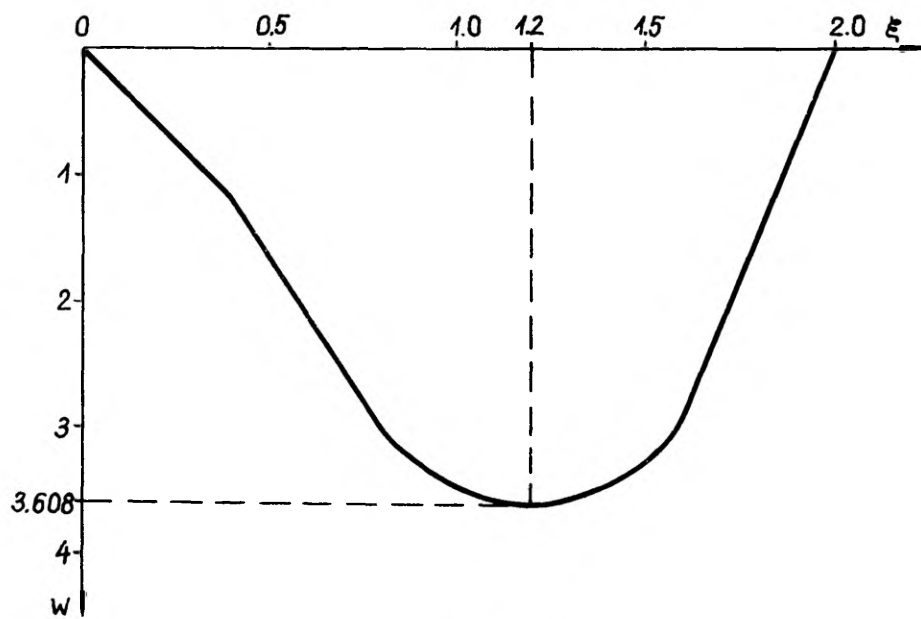
Фиг. 22



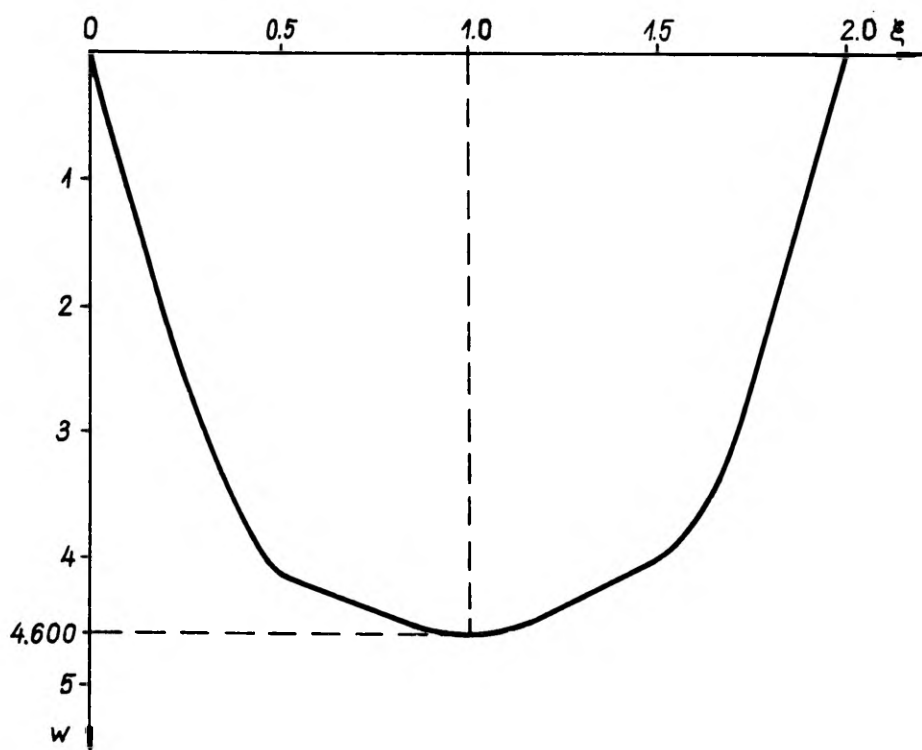
Фиг. 23



Фиг. 24



Фиг. 25

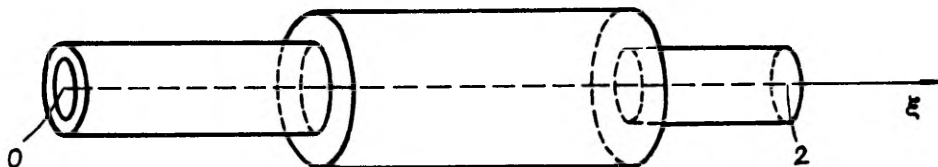


Фиг. 26

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим жёсткопластическую осесимметричную цилиндрическую оболочку типа сэндвича. Общая толщина стенки оболочки переменная (фиг. 27), причём предполагаем, что сумма толщин внешних и толщина внутреннего слоев пропорциональны.



Фиг. 27

Заданы ещё условия закрепления концов оболочки. Один из концов может быть также свободным. Опоры оболочки могут допускать перемещения в осевом направлении, так что осевых усилий не возникает. Оболочка нагружена однопараметрическим внутренним давлением. Предполагаем, что в течение некоторого конечного промежутка времени интенсивность нагрузки выше предельной. Тогда в определённый момент времени оболочка переидёт (целиком или частично) в пластическое состояние и приобретёт некоторую кинетическую энергию. Эта энергия постепенно израсходуется на пластическую работу, и, наконец, движение прекратится. Поставим задачу найти остаточные прогибы срединной поверхности оболочки и время деформирования.

4.2. Основные соотношения

Пусть функция $P(x, t)$, характеризующая интенсивность нагрузки, имеет вид, представленный формулой (1.1).

Уравнение движения оболочки имеет вид:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + \frac{N(x, t)}{R} - P(x, t) + (\varrho_1 + d\varrho_2) h(x) \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1)$$

где t — время, x — координата вдоль оси оболочки, $M(x, t)$, $N(x, t)$ — осевой момент и окружная сила на единицу длины соответственно (момент M считаем положительным, если он вызывает растяжение внутренних волокон, и отрицательным, если внешних; окружная сила положительна, если она вызывает растягивающие напряжения), R , $h(x)$ — радиус и толщина внутреннего слоя стенки, ϱ_1 , ϱ_2 — плотность материала внутреннего и внешних слоев соответственно, $d = \text{const}$ — отношение общей толщины внешних слоев к толщине внутреннего слоя, $W(x, t)$ — прогиб по направлению внешней нормали к срединной поверхности оболочки.

Дальнейшие рассуждения проведём, применяя следующие безразмерные величины и функции:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \alpha_i = \frac{b_i}{l}, \quad \gamma(\xi) = \frac{h(\xi l)}{h_*}, \quad c^2 = \frac{4l^2}{Rh_*}, \\ m(\xi, \tau) &= \frac{4}{d\sigma_0 h_*^2} M(\xi l, T\tau), \quad n(\xi, \tau) = \frac{1}{d\sigma_0 h_*} N(\xi l, T\tau), \\ p_1(\xi) &= \frac{R}{d\sigma_0 h_*} P_1(\xi l), \quad p_2(\tau) = P_2(T\tau), \\ p(\xi, \tau) &= p_1(\xi) p_2(\tau), \quad w(\xi, \tau) = \frac{R(d\varrho_2 + \varrho_1)}{d\sigma_0 T^2} W(\xi l, T\tau), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где T — момент снятия нагрузки, $2l$ — длина оболочки, b_i — координаты точек, где толщина стенки оболочки имеет скачки, σ_0 — предел текучести при растяжении материала. Символом h_* обозначена средняя толщина внутреннего слоя стенки оболочки:

$$h_* = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} h(x) dx.$$

Точкой и штрихом будут обозначены производные по τ и ξ , соответственно. Для сокращения записей будем в дальнейшем пропускать аргументы ξ и τ введённых функций.

Во введённых безразмерных величинах решение задачи должно удовлетворять следующим условиям:

1) уравнению движения

$$m'' + c^2(n - p + \gamma\ddot{w}) = 0; \quad (4.3)$$

2) условию пластичности

$$\Phi(m, n) \leq 0, \quad (4.4)$$

где Φ — функция текучести;

3) соотношениям ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = \frac{\dot{w}''}{c^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial m}, \\ \dot{\epsilon} = \dot{w} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где

$$\lambda \begin{cases} = 0, & \text{если } \Phi(m, n) < 0 \text{ или} \\ & \Phi(m, n) = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial m} \dot{m} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \dot{n} < 0; \\ \geq 0, & \text{если } \Phi(m, n) = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial m} \dot{m} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \dot{n} = 0; \end{cases}$$

4) начальным условиям для скоростей и перемещений

$$\dot{w}(\tau_s(\xi), \xi) = w(\tau_s(\xi), \xi) = 0, \quad (4.6)$$

где $\tau_s(\xi)$ — начальный момент времени пластического деформирования в сечении ξ ;

5) граничным условиям:

- если конец оболочки $\xi^* = 0$ или $\xi^* = 2$ свободно опёрт, то

$$m(\xi^*, \tau) = 0, \quad (4.7)$$

$$\dot{w}(\xi^*, \tau) = 0; \quad (4.8)$$

- если конец оболочки свободен, то к условию (4.7) прибавляется

$$m'(\xi^*, \tau) = 0; \quad (4.9)$$

- при жёсткой заделке конца и на границе жёсткой и пластической областей выполняются условие (4.8) и

$$m(\xi^*, \tau) = \gamma^2(\xi^*); \quad (4.10)$$

- в случае симметричной задачи относительно сечения $\xi^* = 1$ будет достаточно рассмотреть только левую половину оболочки при граничных условиях

$$m'(1, \tau) = 0 \quad (4.11)$$

и либо

$$m(1, \tau) = \pm \gamma^2(1), \quad (4.12)$$

либо

$$\dot{w}'(1, \tau) = 0; \quad (4.13)$$

- на движущейся границе пластической зоны должно удовлетворяться дополнительное граничное условие

$$m'(\xi^*, \tau) = 2\gamma(\xi^*)\gamma'(\xi^*); \quad (4.14)$$

- 6) требованию неотрицательности мощности пластической диссипации энергии:

$$m \frac{\dot{w}''}{c^2} + n \dot{w} \geq 0 \quad (4.15)$$

или

$$m \left(\dot{w}'(\xi^*+, \tau) - \dot{w}'(\xi^*-, \tau) \right) \geq 0, \quad (4.16)$$

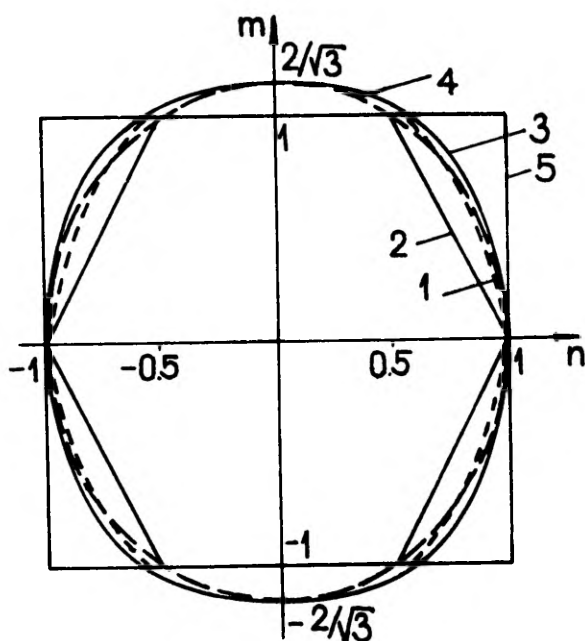
если в сечении ξ^* величина \dot{w}'' является неопределённой.

Из вышеуказанных условий следует ещё уравнение принципа виртуальной мощности (Ерхов, 1978):

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left(m \frac{\dot{w}''}{c^2} + (n - p + \gamma \ddot{w}) \dot{w} \right) d\xi + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^l m(\zeta_i, \tau) \left(\dot{w}'(\zeta_i+, \tau) - \dot{w}'(\zeta_i-, \tau) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

для каждого $\tau \geq 0$, где через ζ_i , $i = 1, \dots, l$ обозначены точки разрыва величины \dot{w}' (в их числе могут быть и концы оболочки). Интегрируя последнее соотношение по τ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^2 \left(m \frac{\dot{w}''}{c^2} + (n - p) \dot{w} \right) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^2 \gamma \dot{w}^2 d\xi + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^l \int_0^\tau m(\zeta_i, \tau) \left(\dot{w}'(\zeta_i+, \tau) - \dot{w}'(\zeta_i-, \tau) \right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$



Фиг. 28

Последнее условие будем использовать в качестве интегрального критерия истинности решения.

Во внутренних точках пластических зон должно быть $\dot{\psi} \neq 0$, и, следовательно напряженное состояние не может находиться в регулярных точках кривой текучести, где $\partial\Phi/\partial n = 0$ (т.е., где касательная к кривой параллельна оси n).

Ограничимся классом задач, где компонента решения $\dot{\psi}(\xi, \tau) \geq 0$, $\xi \in [0, 2]$. Из сделанного предположения, ассоциированного закона течения (4.5) и свойства функции текучести $\text{sign } \partial\Phi/\partial n = \text{sign } n$ вытекает, что

- 1) пластические деформации могут возникать лишь при $n \geq 0$, что позволяет рассматривать только правую часть кривой текучести;
- 2) во внутренних точках пластических зон должно быть $\dot{\psi} \geq 0$ и, следовательно, напряженное состояние не может находиться в регулярных точках кривой текучести, где $\partial\Phi/\partial n = 0$.

На фиг. 28 показаны наиболее часто используемые условия текучести. Кривой 1 соответствует условие текучести Треска в

случае однородной оболочки, а кривой 2 — условие текучести Треска в случае трёхслойной оболочки (шестиугольник Треска). Кривым 3 и 4 соответствует условие текучести Мизеса в случае однородной и трёхслойной оболочки. Довольно часто применяют ещё линеаризированный закон течения в виде прямоугольника 5. В данной работе используем условия Треска и Мизеса в случае трёхслойной стенки оболочки. Проанализируем оба условия отдельно. Остаточные прогибы можно найти, интегрируя соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \dot{w},$$

после чего будем иметь

$$w(\xi, \tau_f) = \int_{\tau_s}^{\tau_f} \dot{w}(\xi, \tau) d\tau, \quad (4.19)$$

где $\tau_f = \tau_f(\xi)$ — время остановки движения в точке ξ .

4.3. Система определяющих уравнений и метод решения при условии текучести Треска

При условии текучести Треска ограничимся оболочкой кусочно-постоянной толщины стенки. Кривая текучести показана на фиг. 29. Из требования $\dot{w} \geq 0$ вытекает, что пластические деформации могут развиваться лишь в точках, где напряженное состояние находится на наклонных сторонах шестиугольника Треска, где $n > 0$, т. е. на прямых

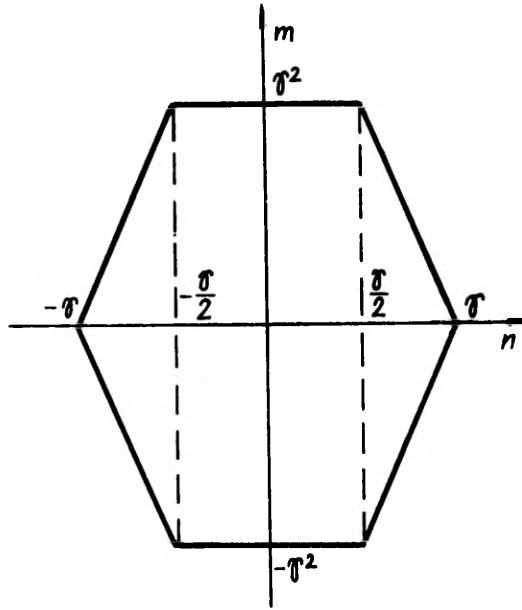
$$\begin{aligned} m + 2\gamma n - 2\gamma^2 &= 0, & \text{если } m \geq 0, \quad n \geq 0; \\ -m + 2\gamma n - 2\gamma^2 &= 0, & \text{если } m \leq 0, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Должно быть выполнено условие

$$|m| \leq \gamma^2 \quad (4.21)$$

Обозначим через β_i , $i = 1, \dots, k$ следующие сечения оболочки:

- 1) границы пластических зон;



Фиг. 29

- 2) сечения скачков толщины;
- 3) сечения разрывности \dot{w}' (пластические шарнирные окружности);
- 4) сечения, где меняется знак изгибающего момента или окружной силы.

Через γ_i обозначим толщину стенки на участке $\xi \in (\beta_i, \beta_{i+1})$. Тогда из ассоциированного закона течения (4.5) и уравнения (4.20) следует

$$\dot{w}'' \pm d_i^2 \dot{w} = 0, \quad \text{где} \quad d_i = \sqrt{\frac{c^2}{2\gamma_i}}. \quad (4.22)$$

Решая последнее уравнение, получим на отрезке $\xi \in (\beta_i, \beta_{i+1})$

$$\dot{w} = \begin{cases} \dot{c}_1^i(\tau) \cos(d_i \xi) + \dot{c}_2^i(\tau) \sin d_i \xi, & \text{если } m \leq 0, \\ \dot{c}_1^i(\tau) \exp(d_i \xi) + \dot{c}_2^i(\tau) \exp(-d_i \xi), & \text{если } m \geq 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

где \dot{c}_1^i, \dot{c}_2^i — искомые функции.

Продифференцировав последнее соотношение по τ , получим

$$\ddot{w} = \begin{cases} \ddot{c}_1^i(\tau) \cos(d_i \xi) + \ddot{c}_2^i(\tau) \sin(d_i \xi), & \text{если } m \leq 0, \\ \ddot{c}_1^i(\tau) \exp(d_i \xi) + \ddot{c}_2^i(\tau) \exp(-d_i \xi), & \text{если } m \geq 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

Подставляя полученное выражение для \ddot{w} в уравнение равновесия (4.3) и учитывая уравнения (4.20), получим

$$\begin{cases} m'' + d_i^2 m = c^2 \left(\gamma_i - p - \gamma_i (\dot{c}_1^i \cos(d_i \xi) + \dot{c}_2^i \sin(d_i \xi)) \right), & \text{если } m \leq 0; \\ m'' - d_i^2 m = c^2 \left(\gamma_i - p - \gamma_i (\dot{c}_1^i \exp(d_i \xi) + \dot{c}_2^i \exp(-d_i \xi)) \right), & \text{если } m \geq 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Проинтегрируем теперь последние уравнения по ξ . Введя следующие функции и матрицы

$$\begin{aligned} \psi_i^1(\xi) &= \begin{cases} -\frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \sin d_i \xi + \frac{1}{2d_i} (\cos(d_i \xi) - \cos(d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \leq 0; \\ -\frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \exp(d_i \xi) - \frac{1}{2d_i} (\exp(d_i \xi) - \exp(d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \geq 0; \end{cases} \\ \psi_i^2(\xi) &= \begin{cases} \frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \cos(d_i \xi) - \frac{1}{2d_i} (\sin(d_i \xi) - \sin(d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \leq 0; \\ \frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \exp(d_i \xi) + \frac{1}{2d_i} (\exp(-d_i \xi) - \exp(-d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \geq 0; \end{cases} \\ \psi_i^{1'}(\xi) &= \begin{cases} -\frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \cos(d_i \xi) + \frac{1}{2d_i} (\sin(d_i \xi) - \sin(d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \leq 0; \\ -\frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \exp(d_i \xi) + \frac{1}{2d_i} (\exp(d_i \xi) - \exp(d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \geq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\psi_i^{2'}(\xi) = \begin{cases} \frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left(-(\xi - \beta_i) \sin(d_i \xi) + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2d_i} (\cos(d_i \xi) - \cos(d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \leq 0; \\ -\frac{c^2 \gamma_i}{2d_i} \left((\xi - \beta_i) \exp(-d_i \xi) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2d_i} (\exp(-d_i \xi) - \exp(-d_i(2\beta_i - \xi))) \right), & \text{если } m \geq 0; \end{cases}$$

$$\nu_i^1(\xi) = \begin{cases} \cos(d_i(\xi - \beta_i)) & , \text{ если } m \leq 0; \\ \cosh(d_i(\xi - \beta_i)) & , \text{ если } m \geq 0; \end{cases}$$

$$\nu_i^2(\xi) = \begin{cases} \sin(d_i(\xi - \beta_i)) & , \text{ если } m \leq 0; \\ \sinh(d_i(\xi - \beta_i)) & , \text{ если } m \geq 0; \end{cases}$$

$$\nu_i^{1'}(\xi) = \begin{cases} -d_i \sin(d_i(\xi - \beta_i)) & , \text{ если } m \leq 0; \\ d_i \sinh(d_i(\xi - \beta_i)) & , \text{ если } m \geq 0; \end{cases}$$

$$\nu_i^{2'}(\xi) = d_i \nu_i^1(\xi) ;$$

(4.26)

$$\mu_i(\xi, y) = \begin{cases} \sin(d_i(\xi - y)) & , \text{ если } m \leq 0; \\ \sinh(d_i(\xi - y)) & , \text{ если } m \geq 0; \end{cases}$$

$$\mu_i'(\xi, y) = \begin{cases} d_i \cos(d_i(\xi - y)) & , \text{ если } m \leq 0; \\ d_i \cosh(d_i(\xi - y)) & , \text{ если } m \geq 0; \end{cases}$$

$$F(\xi, \tau) = \frac{c^2}{d_i} \int_{\beta_i}^{\xi} (p(y, \tau) - \gamma_i) \mu_i(\xi, y) dy;$$

$$F'(\xi, \tau) = \frac{c^2}{d_i} \int_{\beta_i}^{\xi} (p(y, \tau) - \gamma_i) \mu_i'(\xi, y) dy;$$

$$\Psi_i(\xi) = \begin{pmatrix} \psi_i^1(\xi) \\ \psi_i^2(\xi) \end{pmatrix}, \quad \Psi_i'(\xi) = \begin{pmatrix} \psi_i^{1'}(\xi) \\ \psi_i^{2'}(\xi) \end{pmatrix}, \quad N_i(\xi) = \begin{pmatrix} \nu_i^1(\xi) \\ \frac{1}{d_i} \nu_i^2(\xi) \end{pmatrix},$$

$$N_i'(\xi) = \begin{pmatrix} \nu_i^{1'}(\xi) \\ \frac{\nu_i^{2'}(\xi)}{d_i} \end{pmatrix}, \quad M_i = \begin{pmatrix} m_i \\ m_i' \end{pmatrix}, \quad \dot{C}_i = \begin{pmatrix} \dot{c}_1^i \\ \dot{c}_2^i \end{pmatrix},$$

мы можем представить результат в форме

$$m(\xi, \tau) = N_i^T(\xi) M_i + \Psi_i^T(\xi) \dot{C}_i + F(\xi, \tau) \text{ при } \xi \in [\beta_i, \beta_{i+1}] ; \quad (4.27)$$

$$m'(\xi, \tau) = N_i'^T(\xi) M_i + \Psi_i'^T(\xi) \dot{C}_i + F'(\xi, \tau) \text{ при } \xi \in [\beta_i, \beta_{i+1}] \quad (4.28)$$

Принимая в последних формулах $\xi = \beta_{i+1}$, мы получим рекуррентные соотношения относительно переменных m'_i и m_i .

Допустим теперь, что границам пластической зоны соответствуют индексы q и r в векторе $\vec{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $1 \leq q < r \leq n$. В этой зоне мы имеем следующие условия:

- 1) условия непрерывности для m , m' и \dot{w} в точках β_i , $i = q + 1, \dots, r - 1$;
- 2) $\dot{w}'(\beta_i +, \tau) = \dot{w}'(\beta_i -, \tau)$ или $m_i = \pm \gamma^2(\beta_i)$, $i = q + 1, \dots, r - 1$;
- 3) по 2 граничных условия на границах пластической зоны;
- 4) в движущихся точках β_i :
 - $m_i = 0$, если в точке $\xi = \beta_i$ изменяется знак момента;
 - $m'_i = 0$, если при $\xi = \beta_i$ находится движущаяся шарнирная окружность (в том числе могут быть движущиеся границы пластических зон).

Переменными являются

- 1) $\dot{c}_1^i, \dot{c}_2^i, m_i, m'_i$, $i = q, \dots, r - 1$;
- 2) движущиеся точки β_i .

Относительно 4 ($r - q - 1$) переменных типа 1) мы получим квазилинейную дифференциально-алгебраическую систему из условий 1), 2) и 3). Относительно переменных типа 2) мы получим систему нелинейных уравнений из условий 4).

Прежде чем приступить к решению описанной системы, попробуем по возможности её упростить, уменьшая число переменных и уравнений в фундаментальной системе.

Из переменных m_i, m'_i независимыми являются только две (удобно в их качестве выбрать m_q и m'_q); остальные мы можем исключить из системы при помощи рекуррентных соотношений.

Далее исключаем из фундаментальной системы часть переменных \dot{c}_1^i, \dot{c}_2^i . С этой целью обозначим через $K \supseteq \{q, q + 1, \dots, r - 1\}$

совокупность тех индексов, которым соответствуют шарнирные окружности, включая индекс q левой границы пластической зоны. Если $j \notin K, j \neq r$, то при $\xi = \beta_j$ величины \ddot{w} и \ddot{w}' должны быть непрерывными, что приводит к системе уравнений

$$A_{i-1}(\beta_i) C_{i-1} = A_i(\beta_i) C_i, \quad (4.29)$$

где

$$A_i(\xi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos d_i \xi & \sin d_i \xi \\ -d_i \sin d_i \xi & d_i \cos d_i \xi \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_i +, \tau) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \exp(d_i \xi) & \exp(-d_i \xi) \\ d_i \exp(d_i \xi) & -d_i \exp(-d_i \xi) \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_i +, \tau) \geq 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

В общем случае, если k и s — два последовательных индекса из K , то

$$\dot{C}_i = D_k^i \dot{C}_k, \quad i = k, k+1, \dots, s-1, \quad (4.31)$$

где

$$D_k^i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } k = i; \\ \prod_{j=1}^{k-i} [A_{k+j}^{-1}(\beta_{k+j}) A_{k+j-1}(\beta_{k+j})], & \text{если } i > k; \end{cases} \quad (4.32)$$

$$A_j^{-1}(\xi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos d_i \xi & -\frac{1}{d_i} \sin d_i \xi \\ \sin d_i \xi & \frac{1}{d_i} \cos d_i \xi \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_i +, \tau) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \exp(-d_i \xi) & \frac{1}{2d_i} \exp(-d_i \xi) \\ \frac{1}{2} \exp(d_i \xi) & -\frac{1}{2d_i} \exp(-d_i \xi) \end{pmatrix}, & \text{если } m(\beta_i +, \tau) \geq 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

С помощью соотношений (4.31) из системы (4.27)–(4.28) получим

$$\begin{aligned} m_{i+1} &= N_i^T(\beta_{i+1}) M_i + \Psi_i^T(\beta_{i+1}) D_k^i \dot{C}_i + F(\beta_{i+1}, \tau); \\ m'_{i+1} &= N_i'^T(\beta_{i+1}) M_i + \Psi_i'^T(\beta_{i+1}) D_k^i \dot{C}_i + F'(\beta_{i+1}, \tau), \quad (4.34) \\ k &\leq i < s, \quad k \in K, \quad s \in K \bigcup \{\tau\} \setminus \{q\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в фундаментальной системе уравнений остались переменные $\dot{c}_1^k, \dot{c}_2^k, k \in K, m_q, m'_q$. Для их определения мы используем

условия

$$\begin{aligned}\dot{w}(\beta_k-, \tau) &= \dot{w}(\beta_k+, \tau), \\ m(\beta_k, \tau) &= \pm \gamma^2(\beta_k), \quad k \in K, \quad k \neq q\end{aligned}\quad (4.35)$$

и 4 граничных условия.

Запишем фундаментальную систему в виде

$$G \vec{z} = \vec{E}, \quad (4.36)$$

где $G = G(\tau, \beta_i)$ и $\vec{E} = \vec{E}(\tau, \beta_i)$ — матрица и вектор свободных членов системы, $\vec{z} = (\vec{c}_1^*, \vec{c}_2^*, m'_q, m_q)$ — вектор неизвестных, $\vec{c}_j^* = (\dot{c}_j)$, $k \in K$.

Опишем кратко один шаг интегрирования системы.

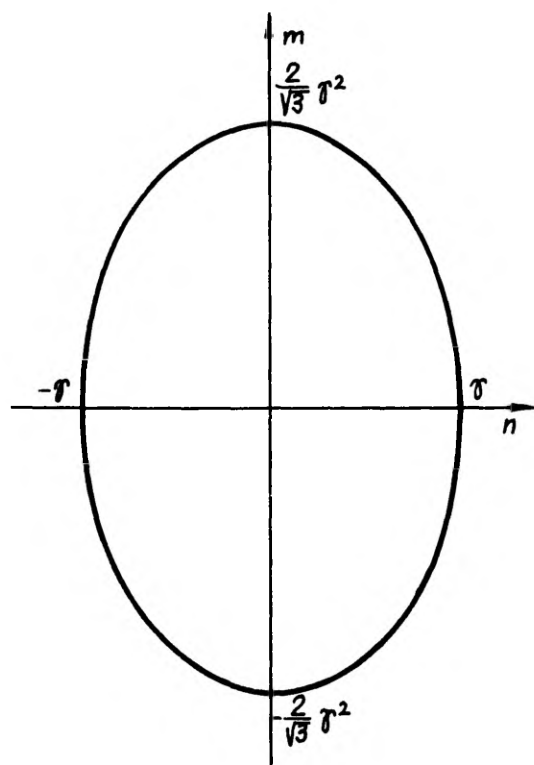
Допустим, что к моменту τ нам известны значения параметров β_i . На их основе составим систему (4.36) и решим её относительно \vec{z} . Далее, при помощи (4.31) определяем неизвестные c_1^i и c_2^i , $i \notin K$ и проводим процедуру интегрирования переменных c_1^i и c_2^i . Затем на основе (4.27)–(4.28) определяем величины m_i и m'_i , $i = q+1, \dots, r-1$ и, наконец, применяя условие 4, найдём новые значения для β_i . Применяя для интегрирования метод Рунге-Кутты, придётся на каждом шагу эту процедуру провести несколько раз. В конечном счёте нами будет найдено решение в момент $\tau + \Delta\tau$. Применяя формулы (4.23) и (4.19) мы можем найти остаточные прогибы и поле скоростей в этот момент. Общую стратегию решения задачи приведём в параграфе 5 данной главы.

4.4. Система определяющих уравнений и метод решения при условии текучести Мизеса

Кривая текучести Мизеса (эллипс Мизеса) показана на фиг. 30. Её уравнением является

$$\Phi(m, n) = \frac{3m^2}{4\gamma^4} + \frac{n^2}{\gamma^2} - 1 = 0, \quad (4.37)$$

Из утверждения в конце пункта 2 и гладкости кривой текучести вытекает, что во внутренних точках пластических зон не может реализоваться напряженное состояние



Фиг 30

$$n = 0, \quad m = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma^2,$$

что исключает возможность появления в этих точках шарнирных окружностей, характерных для кусочно-линейных условий текучести.

Из ассоциированного закона течения (4.5) и уравнения (4.37) следует

$$\dot{w}'' = \frac{3c^2}{2\gamma} m \dot{w} (4\gamma^4 - 3m^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

Найти аналитического решения этого уравнения не удаётся, и в отличие от условия текучести Треска нам придётся интегрировать систему уравнений в частных производных. Из уравнения движения (4.3) и условия текучести (4.37) вытекает, что

$$m'' + c^2 \gamma \ddot{w} = c^2 p - \frac{c^2}{2\gamma} (4\gamma^4 - 3m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

Система (4.38)–(4.39) является системой в частных производных параболического типа относительно искомых функций $\dot{w}(\xi, \tau)$ и $m(\xi, \tau)$ с нелинейной правой частью.

Допустим, что к какому-то временному слою $\tau_j = \tau_s + j \cdot \Delta\tau$, $j = 0, 1, \dots$ мы нашли границы пластической зоны β_q и β_r , $1 \leq q < r \leq k$ и значения функций m и \dot{w} в узловых точках $\xi = \beta_q + i \Delta\xi$, $i = 0, 1, \dots, n_r(\tau)$. Обозначим через

$$m_{i,j} = m(\xi_i, \tau_j), \quad \dot{w}_{i,j} = \dot{w}(\xi_i, \tau_j), \\ j = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_r(\tau_j). \quad (4.40)$$

Интерполируем функцию $m(\xi, \tau_j)$ кубической сплайн-функцией $T_{3,j}(\xi)$. Одновременно с конструированием сплайна конструируются и вторые производные $T_{3,j}''(\xi_i)$. Применяя их в качестве аппроксимации для $m''(\xi_i, \tau_j)$, построим разностную схему по τ для уравнения (4.38). Получим

$$\dot{w}_{i,j+1} = \dot{w}_{i,j} + \frac{\Delta\tau}{c^2\gamma} \left(c^2 p(\xi_i, \tau_j) - \frac{c^2}{2\gamma} (4\gamma^4 - 3m_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} - T_{3,j}''(\xi_i) \right) \quad (4.41)$$

С помощью этой схемы найдём значение \dot{w} в $(j+1)$ -ом слое времени, за исключением её значений в узлах ξ_i , примыкающих к

границам пластической зоны, и в точках β_i , $q < i < r$. Для нахождения значений \dot{w} в названных узлах и для определения движущихся границ рассмотрим ещё одну сплайн-функцию $S_{3,j+1}(\xi)$, аппроксимирующую функцию $\dot{w}(\xi, \tau_{j+1})$. Она должна удовлетворять граничным условиям и условиям непрерывности для \dot{w} и \dot{w}' в точках β_i , $i = q+1, \dots, r-1$.

Если граница пластической зоны совпадает со свободным концом оболочки, то нам не хватает одного граничного условия для определения сплайна, и одно граничное условие $m(\beta_q, \tau_{j+1}) = 0$ (или $m(\beta_r, \tau_{j+1}) = 0$) придётся заменить эквивалентным (на основании уравнения (4.38)) условием $\dot{w}''(\beta_q, \tau_{j+1}) = 0$ (или $\dot{w}''(\beta_r, \tau_{j+1}) = 0$).

На движущейся границе пластической зоны придётся сначала определить положение границы $\xi^* = \beta_q(\tau_{j+1})$ и/или $\xi^* = \beta_r(\tau_{j+1})$.

В первом случае для определения ξ^* предполагаем, что \dot{w} является кубической функцией, проходящей через точки $(\xi^*, 0)$, и удовлетворяющей условиям

$$\dot{w}''(\xi^*, \tau_{j+1}) = 0, \quad \dot{w}'''(\xi^*, \tau_{j+1}) = \frac{4\gamma(\xi^*)}{c^2} \dot{w}(\xi^*, \tau_{j+1}). \quad (4.42)$$

Последние два условия вытекают из граничных условий (4.10) и (4.14). Из названных пяти условий получим уравнение

$$\begin{aligned} \dot{w}_{1,j+1} \left((\xi_0 - \xi^*)^3 + \frac{4\gamma(\xi^*)}{c^2} (\xi_0 - \xi^*) \right) = \\ = \dot{w}_{0,j+1} \left((\xi_1 - \xi^*)^3 + \frac{4\gamma(\xi^*)}{c^2} (\xi_1 - \xi^*) \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

относительно ξ^* . Если $\gamma(\xi) \equiv \text{const}$, $\xi \in [\xi^*, \xi_0]$ и $\dot{w}_{1,j+1} \neq \dot{w}_{0,j+1}$, то последнее уравнение является кубическим уравнением относительно ξ^* , имеющим один действительный корень. Аналогично определяем положение правой движущейся границы, после чего будут определены и граничные условия для сплайна.

После конструирования сплайна $S_{3,j+1}(\xi)$, применяя $S''_{3,j+1}$ в качестве аппроксимации для \dot{w}'' , мы получим из уравнения (4.38)

$$m_{i,j+1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{\gamma^3}{(3c^4 + 4\Theta_i^2 \gamma^2)^{1/2}} \Theta_i, \quad (4.44)$$

где

$$\Theta_i = \frac{S''_{3,j+1}(\xi_i)}{\dot{w}(\xi_i, \tau_{j+1})} \quad (4.45)$$

В граничных точках пластической зоны условие (4.44) заменяется соответствующим граничным условием для изгибающего момента.

После осуществления описанной процедуры нами найдено решение системы во временном слое τ_{j+1} . В случае подвижных границ после каждого шага придётся ещё расширять или стягивать сетку по ξ .

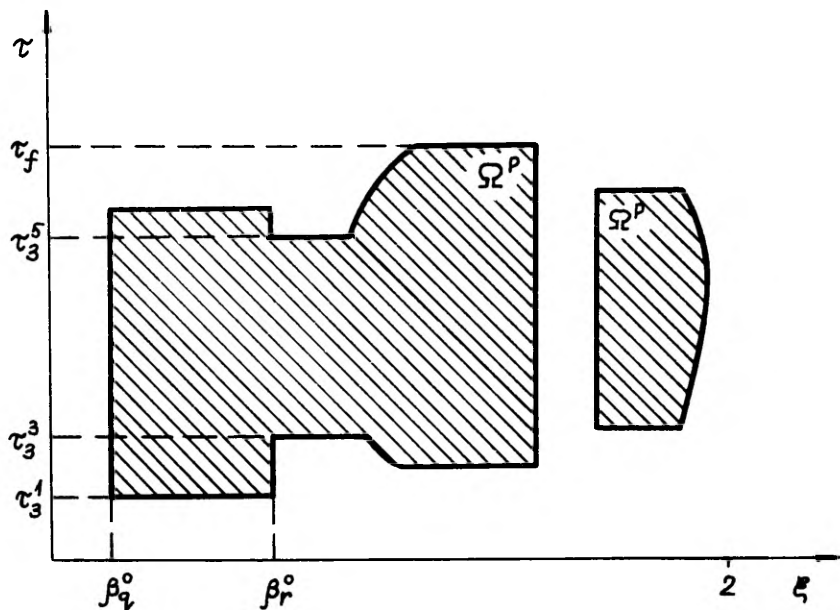
При малых скоростях (в начале и в конце движения) описанный алгоритм не работает ввиду неопределённостей в (4.45). Тогда в некотором временном интервале придётся интегрировать "жёсткое уравнение" (4.39) при фиксированных значениях m , игнорируя уравнение (4.38).

4.5. Общая схема решения задачи

Описанные системы уравнений не применимы в жёстких зонах оболочки. Для решения задачи придётся сначала определить предельную нагрузку, начальные границы пластических зон и распределение напряжений. Кроме того, в ходе решения задачи могут возникнуть новые пластические зоны, а старые могут помимо непрерывного расширения увеличиваться ещё скачком. Расчёт жёстких зон можно провести по-разному; в данной диссертации применен метод линейного программирования. Опишем этот метод в случае условия текучести Треска.

После дискретизации уравнения равновесия (4.3) при $w \equiv 0$ и перехода к новым переменным $m_i^+ = m_i + \gamma^2(\xi_i)$, $n_i^+ = n_i + \gamma(\xi_i)$ мы приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} p_2^m &\longrightarrow \max, \\ m_{i-1}^+ - 2m_i^+ + m_{i+1}^+ - \gamma^2(\xi_{i-1}) + 2\gamma^2(\xi_i) - \gamma^2(\xi_{i+1}) + \\ &\quad + c^2 (n_i^+ - \gamma(\xi_i) - p_2^m p_1(\xi_i)) \quad (\Delta\xi)^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ -m_i^+ + 2\gamma n_i^+ - 3\gamma^2(\xi) &\leq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ m_i^+ + 2\gamma n_i^+ - 5\gamma^2(\xi) &\leq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ m_i^+ - 2\gamma^2(\xi_i) &\leq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ n_i^+ - 2\gamma(\xi_i) &\leq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ n_i^+ &\geq 0, \quad i = 0, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.46)$$



Фиг. 31

$$m_i^+ \geq 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ p_2^m \geq 0$$

Если какой-то конец оболочки свободно опёрт, то прибавляется условие $m_0^+ = \gamma^2(0)$ или/и $m_n^+ = \gamma^2(2)$. Если же конец совсем свободный, то к предыдущему условию прибавляется $m_0^+ - m_1^+ = 0$ или $m_n^+ - m_{n-1}^+ = 0$.

После решения задачи линейного программирования найдём момент начала деформирования, решая уравнение $p_2(\tau) = p_2^m$. Мы можем также определить начальные границы пластических зон и напряженные состояния в них, анализируя найденные значения m_i^+ и n_i^+ .

Чтобы применять метода линейного программирования в случае условия текучести Мизеса придётся сначала линеаризировать соответствующую кривую.

Опишем теперь кратко общую схему решения задачи.

Пусть деформирование оболочки происходит в области $\Omega^P \subset [0, 2] \times \tau, \tau \geq 0$ (фиг. 31).

Сначала при помощи метода линейного программирования найдём предельное значение p_2^m для амплитудной функции $p_2(\tau)$, начальные границы пластических зон β_q^0, β_r^0 и распределение напря-

жений (т.е. функций $m(\xi, \tau_s^1)$ и $n(\xi, \tau_s^1), \beta_q^0 \leq \xi \leq \beta_r^0$). Момент времени τ_s^1 найдём из уравнения $p_2(\tau_s^1) = p_2^m$. Затем приступим к интегрированию системы определяющих уравнений для этой зоны. В каждый момент времени мы можем найти значения функций $m(\xi, \tau)$ и $m'(\xi, \tau)$ на границах жёстких и пластических зон. Теперь рассмотрим каждую жёсткую зону $\Omega_1^R = [0, \beta_q]$, $\Omega_2^R = [\beta_r, 2]$ как изолированную оболочку и, учитывая найденные граничные условия для моментов, определим для неё предельную нагрузку и момент начала деформирования τ_s^i . Если этот момент достаточно близок к текущему моменту, то соответствующим образом расширим старые и/или прибавим новые пластические зоны.

После шага интегрирования в каждой пластической зоне следует провести анализ истинности решения. В принципе мы должны проверить выполнение условия пластичности (4.4) и неотрицательности мощности диссипации (4.15). В точках неопределённости \dot{w}'' проверим условие (4.17). В случае условия текучести Мизеса условие (4.4) окажется выполненным автоматически, но в случае условия Треска оно равносильно условию (4.22). Если где-нибудь оно является невыполненным, то в соответствующем сечении появляется новая шарнирная окружность и придётся соответствующим образом перестроить систему определяющих уравнений.

Если неравенство (4.15) окажется где-нибудь нарушенным, то движение в соответствующем сечении прекращается; если (4.16) не удовлетворено, то в соответствующем сечении пластическая шарнирная окружность исчезает. Решение системы заканчивается, когда скорости становятся везде равными нулю. К этому моменту определяются и остаточные прогибы.

На каждом шагу интегрирования найдём ещё поправки в интегралах уравнений (4.18) и (4.19).

Отклонение функционала, стоящего в левой части уравнения (4.18), от нуля даёт нам возможность судить об истинности решения.

Таким образом, общую схему решения можно представить так:

- 1) решить задачу о несущей способности оболочки и найти начальные границы пластических зон;

- 2) провести шаг интегрирования во всех пластических зонах;
- 3) провести анализ результатов интегрирования и в случае необходимости скорректировать систему определяющих уравнений;
- 4) провести анализ жёстких зон и в случае необходимости скорректировать количество и/или границы пластических зон;
- 5) если движение не завершено, идти к 2.

С целью экономии машинного времени можно процедуру 4 проводить не на каждом шагу интегрирования, а только после нескольких шагов в фазах нарастания нагрузки, интерполируя значения p_2^m

Следует ещё отметить, что в момент неплавного срастания или уединения двух пластических зон (моменты τ_s^3 и τ_s^5 на фиг. 31) $m(\xi, \tau)$ в общем случае имеет разрыв по времени, т.е.

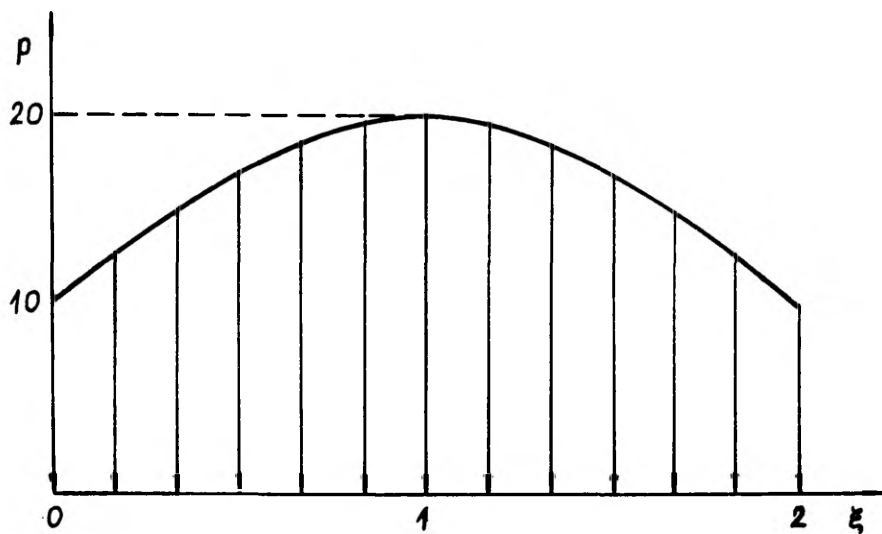
$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_s^3-} m(\xi, \tau) \neq \lim_{\tau \rightarrow \tau_s^3+} m(\xi, \tau). \quad (4.47)$$

4.6. Примеры

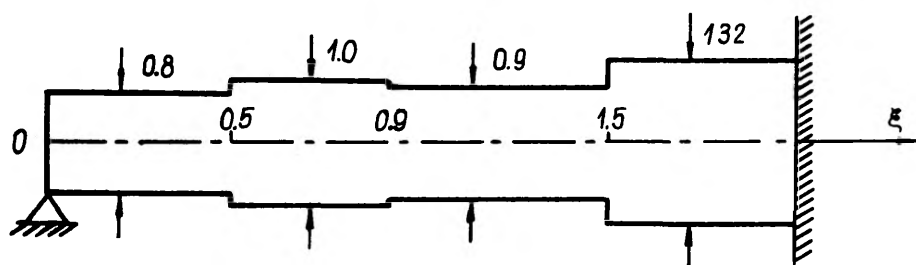
Пример 1. Приведём результаты вычисления прогибов оболочки, толщина стенки которой показана на фиг. 33. Параметр $c^2 = 10$. Левый край оболочки свободно опёрт, а правый — жёстко заделан. Распределение максимального внутреннего давления показано на фиг. 32. Зависимость нагрузки от времени во всех примерах определена формулой (1.2). На фиг. 34 изображены прогибы, соответствующие условиям текучести Треска и Мизеса. Момент остановки движения τ_f в случае условия Треска равен 5.646, а в случае условия Мизеса — 5.084.

Пример 2. Левый край оболочки заделан, а правый — свободен. Толщина стенки оболочки показана на фиг. 36, а распределение внутреннего давления — на фиг. 35. Параметр $c^2 = 25$. Прогибы в обоих случаях изображены на фиг. 37. Движение заканчивается в случае условия Треска при $\tau_f = 2.571$, а в случае условия Мизеса при $\tau_f = 2.344$.

Пример 3. Оба края оболочки свободно опёрты. Толщина стенки оболочки показана на фиг. 39, а распределение внутреннего давления — на фиг. 38. Параметр $c^2 = 15$. Прогибы в обоих

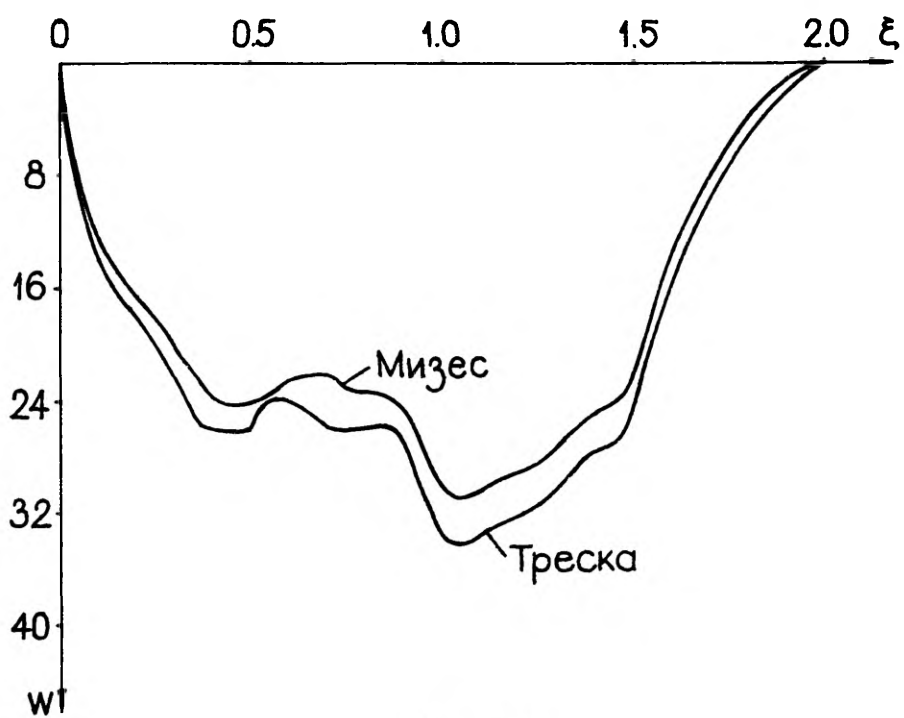


Фиг. 32

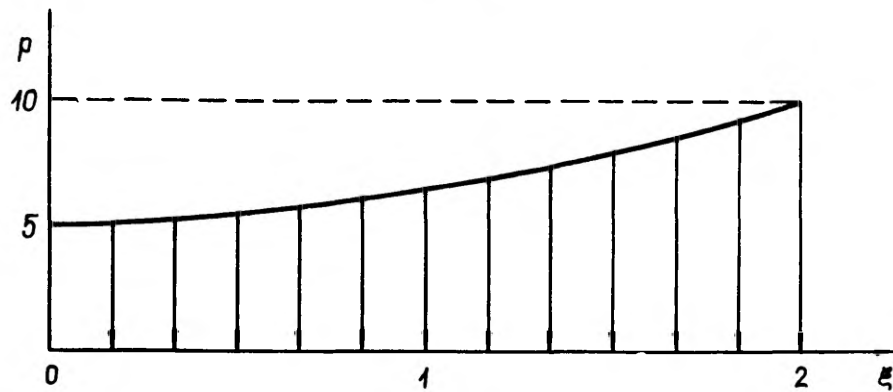


Фиг. 33

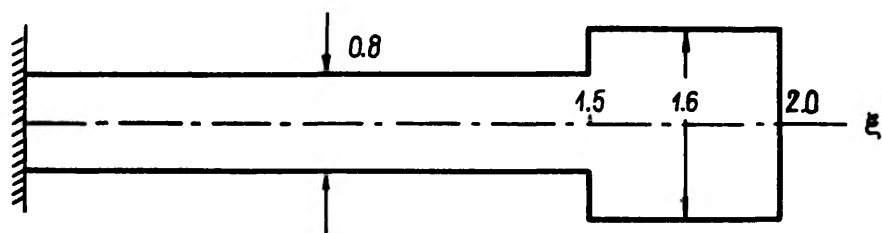
случаях изображены на фиг. 40. Движение заканчивается в случае условия Треска при $\tau_f = 12.455$, а в случае условия Мизеса — 11.300.



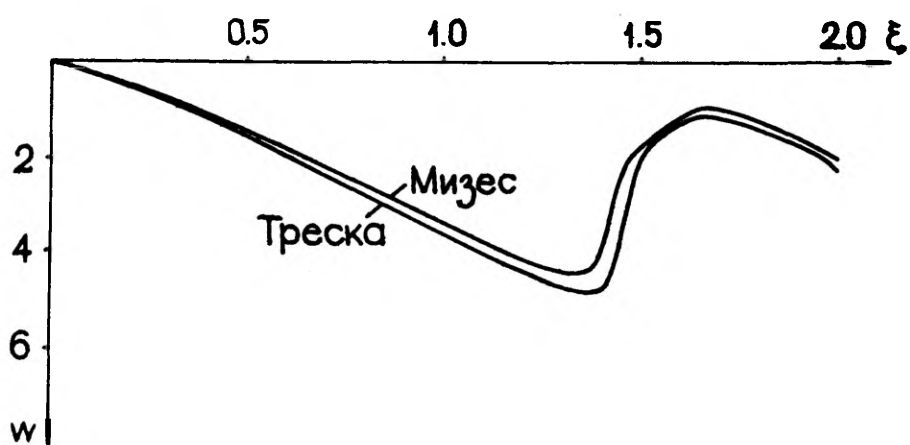
Фиг. 34



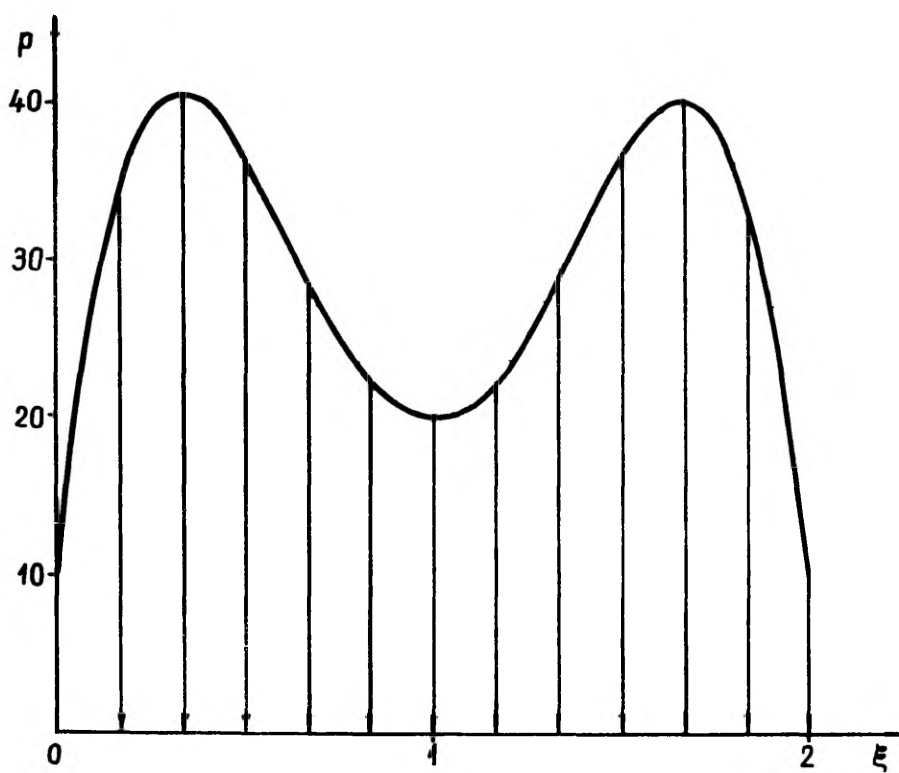
Фиг. 35



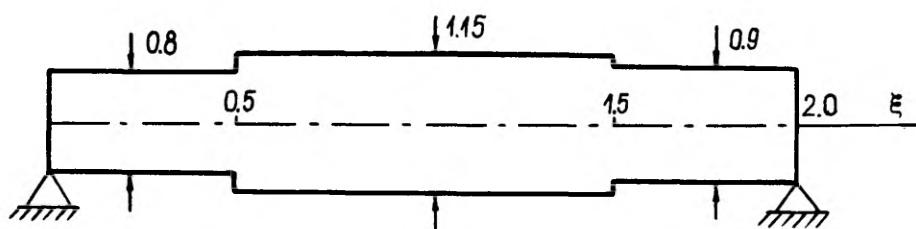
Фиг. 36



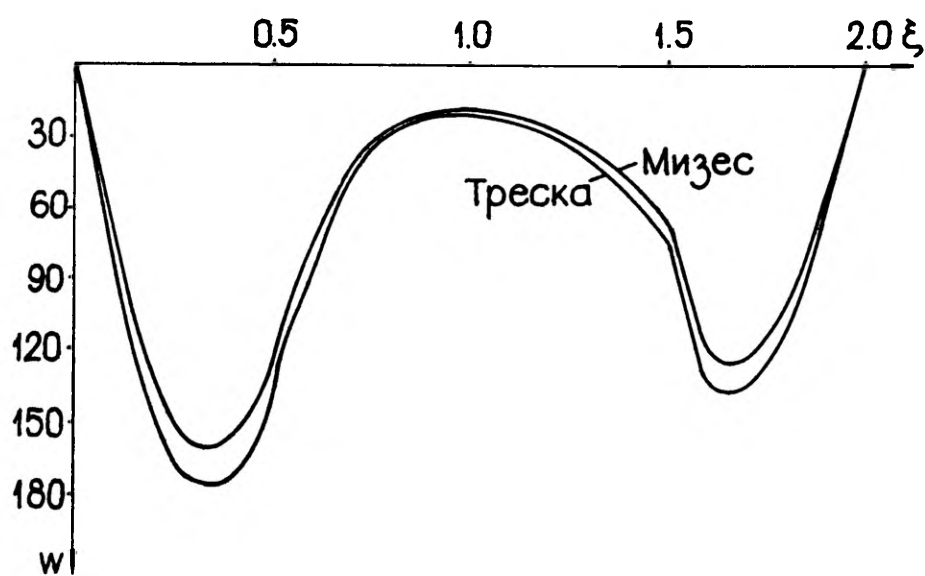
Фиг. 37



Фиг. 38



Фиг. 39



Фиг. 40

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации рассматривается решение задач динамического изгиба жёсткопластических ступенчатых балок и цилиндрических оболочек. В случае балок с нефиксированными концами решается также задача оптимального проектирования. Главной целью диссертации было создание алгоритмов решения названных задач. Все задачи решены в точной постановке, т.е. рассматривается возникновение, движение и исчезновение нестационарных пластических шарниров и шарнирных окружностей.

Основные результаты данной работы следующие.

- 1) Выведены формулы и составлены алгоритмы для решения задач определения остаточных прогибов жёсткопластических ступенчатых балок как с фиксированными, так и с нефиксированными концами при различных краевых условиях. Решены ряд конкретных задач.
- 2) Выработана и реализована методика определения оптимальных параметров конфигурации балки с нефиксированными концами, соответствующими минимальному значению максимального остаточного прогиба при фиксированном объёме балки. При решении конкретных задач обнаружено существование гиперповерхности оптимальности. Последнее явление отмечалось и другими авторами. На названных гиперповерхностях значение минимизируемого функционала очень мало отличается от его оптимального значения. Имея в виду отмеченную особенность, можно рекомендовать при проектировании реальных конструкций выбор произвольной точки на гиперповерхности оптимальности. Это обстоятельство даст проектировщику большую свободу при выборе параметров
- 3) Выведены формулы и системы уравнений, составлены алгоритмы для решения задач определения остаточных прогибов жёсткопластических цилиндрических оболочек. При этом использованы условия текучести Треска и Мизеса. Отмечено существенное различие между образующимися системами уравнений. Результаты решения конкретных задач при помощи составленных пакетов программ позволяют сравнивать два названных условия текучести. Существенные различия в остаточных прогибах существуют только при относительно коротких оболочках. При вычислении прогибов оболочек с

параметром $s^2 > 50$ различия в прогибах превышают 5% только в окрестности концов и точек разрыва толщины стенки. Таким образом, в случае длинных оболочек целесообразно использовать более простые кривые текучести (например, в виде прямоугольника), или вообще безмоментную теорию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Агабабян, Е. К. (1955). Динамическое расширение полого цилиндра в условиях идеальной пластичности. *Укр. матем. журнал*, 7(3):243–252.
- Ерхов, М. И. (1978). *Теория идеально пластических тел и конструкций*. Москва, "Наука"
- Задоян, М. А. (1960). Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления. *Изв. АН АрмССР, Физ.-матем. н.*, 13(3):89–95.
- Кузин, П. А. (1962). О динамическом изгибе жёсткопластической цилиндрической оболочки. *Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение*, 6:88–94.
- Кузин, П. А. (1964). О динамике жёсткопластической цилиндрической оболочки конечной длины. *Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение*, 2:105–115.
- Лепик, Ю. (1979). Оптимальное проектирование жёсткопластических балок под действием динамических нагрузок. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 487:16–27.
- Лепик, Ю. (1980). Решение задач динамического изгиба жёсткопластических конструкций методом квазимодальных форм движения. В сб. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*, 14, стр. 70–74.
- Лепик, Ю. (1982). *Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения*. Tallinn, "Valgus"
- Лепик, Ю. (1985). Оптимальное проектирование динамически нагруженных жёсткопластических балок с учётом мембранных эффектов. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 721:25–38.
- Лепикулт, Т. (1983). Автоматизированный расчёт динамики жёсткопластических ступенчатых балок. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 659:12–22.
- Лепикулт, Т. (1985). Автоматизированный расчёт динамического изгиба и оптимального проектирования жёсткопластических балок ступенчато-постоянной высоты. В сб. *Актуальные проблемы прочности*, стр. 78, Тарту.

- Лепикулт, Т. (1987). Оптимальное проектирование жёсткопластических ступенчатых балок. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 772:3–10.
- Лепикулт, Т. (1988а). Автоматизированный расчёт динамики жёсткопластических цилиндрических оболочек. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 799:62–79.
- Лепикулт, Т. (1988б). Динамический расчёт жёсткопластических цилиндрических оболочек. В сб. *Актуальные проблемы механики оболочек*, стр. 127, Казань.
- Лепикулт, Т. (1989а). Автоматизированный расчёт жёсткопластических балок с фиксированными концами. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 853:25–37
- Лепикулт, Т. (1989б). Оптимизация динамически нагруженных жёсткопластических балок с фиксированными концами. В сб. *Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций*, стр. 39, Тарту.
- Лепикулт, Т. (1990а). Автоматизированный расчёт динамически нагруженных жёсткопластических цилиндрических оболочек. В сб. *Математическое моделирование технологических процессов обработки материалов давлением*, стр. 32, Пермь.
- Лепикулт, Т. (1990б). Автоматизированный расчёт задач динамики жёсткопластических цилиндрических оболочек. В сб. *Проблемы теоретической и прикладной математики*, стр. 297–300, Тарту.
- Мазалов, В. Н., Немировский, Ю. В. (1975). Динамика тонкостенных пластических конструкций. В сб. *Проблемы динамики упруго-пластических сред*, стр. 155–247, Москва, "Мир"
- Оленев, Г. М. (1982). Деформация жёсткопластической цилиндрической оболочки при импульсной нагрузке. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 627:57–65.
- Оленев, Г. М. (1989). Изгиб жёсткопластической цилиндрической оболочки под действием распределённого импульсного нагружения. *Tartu Riikl. Ülik. Toim.*, 853:68–92.
- Спорыхин, А. Н., Хомяков, Н. Д. (1971). О динамическом изгибе жёсткопластической цилиндрической оболочки под

- действием распределённого давления. *Сборник научных трудов факультета прикладной математики и механики ВГУ*, 1:76–84.
- Conroy, M. F. (1952). Plastic-rigid Analysis of Long Beams under Transverse Impact. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 19(3):465–470.
- Conroy, M. F. (1955). Plastic-rigid analysis of a special class of problems involving beams subject to dynamic transverse loading. *J. Appl. Mech., Trans ASME*, 22(1):48–52.
- Drucker, D. C. (1953). Limit Analysis of Cylindrical Shells under Axially-Symmetric Loading In *Proc. of the first Midwest Conference on Solid Mechanics*, pages 158–163.
- Duwez, P. E., Clark, D. C., and Bohnenblust, H. F. (1950). The behaviour of long beams under impact loading. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 17. Русск. перев. Сб. "Механика" Новое в зарубежном науке. 1950, 3, 52–63.
- Eason, G. and Shield, R. T. (1956). Dynamic Loading of Rigid-Plastic Cylindrical Shells. *J. Mech. and Phys. Solids*, 4(2):53–71.
- Hodge, P. G. (1955a). Impact Pressure Loading of Rigid-Plastic Cylindrical Shell. *J. Mech. and Phys. Solids*, 3(3):176–188.
- Hodge, P. G. (1955b). Ultimate Dynamic Load of a Circular Cylindrical Shell. In *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Solid Mechanics*, pages 150–177, Lafayette.
- Hodge, P. G. (1956). The Influence of Blast Characteristics on the Final Deformation of Circular Cylindrical Shells. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 23(4):617–624.
- Hodge, P. G. (1959). The Effect of End Conditions on the Dynamic Loading of Plastic Shells. *J. Mech. and Phys. Solids*, 7(4):258–263.
- Hodge, P. G. and Paul, B. (1957). Approximate Yield Conditions in Dynamic Plasticity. In *Proceedings of the Third Midwestern Conference on Solid Mechanics*, pages 29–47, the University of Michigan.
- Kuzin, P. A. and Shapiro, G. S. (1966). On Dynamic Behaviour of Plastic Structures. In *Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics*, pages 629–635, Munich (Germany). Springer Verlag.

- Lée, E. H. and Symonds P. S. (1952). Large plastic deformations of beams under transverse impact. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 19(3):308–310.
- Lepik, Ü. (1979). The method of quasimodal form solutions for the dynamic response of rigid-plastic structures. *Mech. Res. Commun.*, 6(3):135–140.
- Lepik, Ü. (1980). Some Remarks on the Dynamic Response of Rigid-Plastic Beams *J. Struct. Mech.*, 8(3):227–235.
- Lepik, Ü. (1981). Optimal Design of Rigid-Plastic Simply Supported Beams under Impulsive Loading. *Int. J. Solids Struct.*, 17:617–629.
- Lepik, Ü. (1982). Optimal design of rigid-plastic simply supported beams under dynamic pressure loading. *Int. J. Solids Struct.*, 18(4):285–295.
- Lepik, Ü. (1985). Optimal Design of Elastic Beams with Segmentwise Constant Height in the Case of Dynamic Loading. *Int. J. Impact Engng.*, 3(2):77–91.
- Lepik, Ü. and Just, M. (1983). Automatic calculation for bending of rigid-plastic beams under dynamic loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 38:19–28.
- Lepik, Ü. and Lepikult, T. (1987). Automated calculation and optimal design of rigid-plastic beams under dynamic loading. *Int. J. Impact Engng.*, 6(2):87–99.
- Lepik, Ü. and Mróz, Z. (1977). Optimal Design of Plastic Structures under Impulsive and Dynamic Pressure Loading. *Int. J. Solids and Struct.* 13(7):657–674.
- Lepik, Ü. and Mróz, Z. (1978). Optimal Design of Impulsively Loaded Plastic Beams for Asymmetric Mode Motions. *Int. J. Solid Structures*, 14(10):841–850.
- Lepikult, T. (1992). A comparison of the Tresca and Mises yield conditions in case of dynamically loaded cylindrical shells. *Tartu Ülik. Toim.*, 939:35–41.
- Martin, J. B. and Symonds, P. S. (1966). Mode Approximations for Impulsively Loaded Rigid-Plastic Structures. *J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE*, 92(5):43–66.

- Mentel, T. J. (1958). The Plastic Deformation due to Impact of a Cantilever Beam with an Attached Tip Mass. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 25(4):515–524.
- Owens, R. H. and Symonds, P. S. (1955). Plastic deformations of a free ring under concentrated dynamic loading. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 22(4):523–529.
- Parkes, E. W. (1955). The Permanent Deformation of a Cantilever Struck Transversely at its Tip. *Proc. Roy. Soc.*, A228(1175):462–476.
- Parkes, E. W. (1956). Some Simple Experiments on the Dynamic Plastic Behaviour of Mild-Steel Beams. *British Welding*, 3(8):362–366.
- Sankaranarayanan, R. (1962). Dynamic Response of Plastic Circular Cylindrical Shells under Lateral and Hydrostatic Pressures. *J. Aeronaut. Soc. India*, 14(1).
- Symonds, P. S. (1953). Dynamic load characteristics in Plastic Bending of Beams. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 20(4):475–488.
- Symonds, P. S. (1954). Large Plastic Deformation of Beams under Blast Loading. In *Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech.*, ASME, pages 505–515.
- Symonds, P. S. (1956). Dynamic Loading and Impact. *British Welding J.*, 3(8):359–361.
- Symonds, P. S. and Leth, C. F. A. (1954). Impact of finite beams of ductile metal. *J. Mech. and Phys. Solids*, 2(2):92–102.
- Symonds, P. S. and Mentel, T. J. (1958). Impulsive loading of plastic beams with axial constraints. *J. Mech. and Phys. Solids*, 6(3):186–196.

JÄIKPLASTSETE KONSTRUKTSIOONIDE DÜNAAMIKA ÜLESANNETE AUTOMATISEERITUD LAHENDAMINE

Kokkuvõte

Käesolevas töös vaadeldakse jäikplastsete astmeliste talade ning silindriliste koorikute jääkläbipainete arvutamist dünaamilise koormuse korral. Talale või silindrile on mingis lühikeses ajavahemikus rakendatud staatilist piirkoormust ületav koormus, mis põhjustab konstruktsiooni plastse deformeerumise. Eesmärgiks on leida konstruktsiooni jääkläbipainded etteantud kinnitustingimuste, seinakuju ja koormuse korral. Teises peatükis on eesmärgiks leida astmelise tala optimaalne kuju, nii et etteantud tala ruumala korral oleks maksimaalne jääkläbipaine minimaalne. Ülesannete lahendamisel võetakse arvesse plastsete šarniiride ja plastsete piirkondade rajade liikumist.

Põhitulemused on järgmised.

- 1) On töötatud välja algoritmid jäikplastsete astmeliste talade dünaamika ülesannete lahendamiseks arvutil. Eraldi on vaadeldud teljesuunas liikuvate tuge dega tala dünaamikat ja fikseeritud tuge dega tala dünaamikat.
- 2) On töötatud välja meetoodika dünaamiliselt koormatud tala optimaalse konfiguratsiooni arvutamiseks tingimusel, et konstantse ruumala korral oleks maksimaalne jääkläbipaine minimaalne.
- 3) Silindriliste koorikute korral on kasutatud Tresca ja Misese voolamistingimust. On tuletatud võrrandite ja võrratuste süsteemid läbipaindekiiruste ja pingete määramiseks ning välja töötatud algoritim ülesande lahendamiseks.

CURRICULUM VITAE

Тоомас Лепикулт

- 1) Гражданство: Эстонская Республика.
- 2) Родился 27 июня 1959 г. в Хартюском уезде.
- 3) Семейное положение: холост.
- 4) Место жительства: EE2400, Тарту, Мыйзавахе 43, кв. 18. ,
тел.: (+372 7) 48 78 72 (дома)
(+372 7) 43 54 36 (на работе)
Электронная почта: tom@math.ut.ee

Образование

- 1) 1977 окончил Таллинскую спортивную школу-интернат;
- 2) 1982 окончил математический факультет ТГУ

Курс повышения квалификации

1984 г. стажировал 4 месяца в Ленинградском Государственном Университете.

Прохождение службы

- 1) 1982–1988 — инженер в ТУ;
- 2) 1988–1992 — младший научный сотрудник в ТУ;
- 3) 1992–1994 — лектор и научный сотрудник в ТУ;
- 4) с августа 1994 — лектор в ТУ

Научная деятельность

Исследовал:

- 1) динамику пластических конструкции; результаты докладывались на конференциях и семинарах в Горьком (1984), в Ленинграде (1987), в Шушенское (1987), в Казане (1988), Лейпзиге (1989), в Перьме (1990), в Веймаре (1990), в Таллине (1988 и 1994), в Тарту (1985, 1989 и 1990); результаты опубликованы в статьях (Лепикулт, 1983–1990; Lepik, Lepikult 1987; Lepikult, 1992).
- 2) деформации в локально нагруженных упругих цилиндрах; результаты докладывались в Линкёпинге (1994); результаты в печати (Уч. зап. Тартуск. Университета).

CURRICULUM VITAE

Toomas Lepikult

- 1) Kodakondsus: Eesti Vabariik.
- 2) Sündis 27 juunil 1959. a. Harjumaal.
- 3) Perekonnaseis: vallaline.
- 4) Elukoha aadress: EE2400, Tartu, Mõisavahe 43, krt. 18.,
tel.: (+372 7) 48 78 72 (kodus)
(+372 7) 43 54 36 (tööl)
E-mail: tom@math.ut.ee

Haridus

- 1) 1977. a. lõpetas Tallinna Spordiinternaatkooli;
- 2) 1982. a. lõpetas TÜ matemaatikateaduskonna.

Erialane enesetäiendus

1984. a. stažeeris 4 kuud Leningradi Riikliku Ülikooli juures.

Erialane teenistuskäik

- 1) 1982–1988 — insener TÜ-s;
- 2) 1988–1992 — nooremteadur TÜ-s;
- 3) 1992–1994 — lektor-teadur TÜ-s;
- 4) 1994. a. augustist käesoleva ajani — lektor TÜ-s.

Teaduslik tegevus

On uurinud:

- 1) plastsete konstruktsioonide dünaamikat; uurimistulemustega on esinenud konverentsidel ja seminaridel Gorkis 1984, Leningradis 1987. a., Šušenskojes 1987. a., Kaasanis 1988. a., Leipzigis 1989. a., Permis 1990. a., Weimaris 1990. a., Tallinnas 1988. ja 1994. a. ning Tartus 1985., 1989. ja 1990. a.; tulemused on publitseeritud artiklites (vt. kirjanduse loetelu) (Лепикулт, 1983–1990; Lepik, Lepikult 1987; Lepikult, 1992).
- 2) deformatsioone lokaalselt koormatud elastses silindris; tulemused on ette kantud 1994. a. Linköpingis. Tulemused on avaldamisel Tartu Ülikooli toimetiste sarjas.

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

UNIVERSITATIS TARTUENSIS

- 1) Mati Heinloo. The design of nonhomogeneous spherical vessels, cylindrical tubes and circular discs. Tartu, 1991. 23 p.
- 2) Boris Komrakov. Primitive actions and the Sophus Lie problem. Tartu, 1991. 14 p.
- 3) Jaak Heinloo. Phenomenological (continuum) theory of turbulence. Tartu, 1992. 47 p.
- 4) Ants Tauts. Infinite formulae in intuitionistic logic of higher order. Tartu, 1992. 15 p.
- 5) Tarmo Soomere. Kinetic theory of Rossby waves. Tartu, 1992. 32 p.
- 6) Jüri Majak. Optimization of plastic axisymmetric plates and shells in the case of Von Mises yield condition. Tartu, 1992. 32 p.
- 7) Ants Aasma. Matrix transformations of summability and absolute summability fields of matrix methods. Tartu, 1993. 32 p.
- 8) Helle Heim. Optimization of plastic axisymmetric plates and shells with piece-wise constant thickness. Tartu, 1993. 28 p.
- 9) Toomas Kiho. Study of optimality of iterated Lavrentiev method and its generalizations. Tartu, 1994. 23 p.
- 10) Arne Kokk. Joint spectral theory and extension of non-trivial multiplicative linear functionals. Tartu, 1995. 165 p.



ISSN 1024-4212
ISBN 9985-56-104-X